

ANALYSE MATHÉMATIQUE

Méthodes et outils pour l'ingénieur

Rabah RABAH

29 avril 2013

EMN

Table des matières

I	Éléments d'analyse vectorielle	1
1	Opérateurs différentiels	3
1.1	Éléments de topologie	3
1.2	Gradient, laplacien, jacobienne	4
1.2.1	Gradient d'une fonction scalaire	4
1.2.2	Le laplacien	5
1.2.3	Jacobienne d'une fonction vectorielle	5
1.2.4	Quelques conséquences directes	6
1.3	Divergence, rotationnel	7
1.4	Propriétés des opérateurs	7
1.5	Intégrales multiples	8
1.5.1	Exemples	9
2	Intégrale curviligne : théorème de Green	11
2.1	Intégrale curviligne	11
2.1.1	Courbe rectifiable	11
2.1.2	Intégrale curviligne d'une fonction scalaire	12
2.1.3	Intégrale curviligne de fonction vectorielle	14
2.1.4	Exemples	15
2.2	Le théorème de Green	16
2.2.1	Formule de Green	16
2.2.2	Exemples	18
2.2.3	Lien entre les deux types d'intégrales. Formule de la divergence	19
2.3	Champs dérivant d'un potentiel dans \mathbb{R}^2	20
3	Formules de Stokes et d'Ostrogradsky	23
3.1	Intégrale de surface	23
3.1.1	Surface quarrable	23
3.1.2	Intégrale de surface de fonction scalaire	23
3.1.3	Intégrale de surface de fonction vectorielle	24
3.2	Formule d'Ostrogradsky	25
3.3	Théorème de Stokes	26
3.3.1	Formule de Stokes	26
3.3.2	Exemple	27
3.3.3	Champ dérivant d'un potentiel, différentielle exacte	28

II	Éléments d'analyse complexe	31
4	Fonctions holomorphes	33
4.1	Limite, continuité	33
4.1.1	Exemples	34
4.2	Dérivation, fonction holomorphe	34
4.2.1	Exemples	35
4.2.2	Conditions de Cauchy-Riemann et conséquences	38
4.2.3	Exemples	40
4.3	Les fonctions élémentaires	41
4.3.1	L'exponentielle	41
4.3.2	Les fonctions trigonométriques	42
4.3.3	Logarithme et puissances non entières	42
5	Formules de Cauchy et méthode des résidus	43
5.1	Intégrale curviligne complexe	43
5.1.1	Exemples	44
5.2	Les théorèmes de Cauchy	44
5.2.1	Le théorème de Cauchy-Goursat	45
5.2.2	La formule de Cauchy	47
5.2.3	Exemples	49
5.3	Série de Laurent et analyticité	50
5.4	Théorème des résidus	52
5.4.1	Points singuliers	52
5.4.2	Méthode des résidus	53
5.4.3	Calcul des résidus	55
5.4.4	Exemples	56
6	Applications	59
6.1	Calcul d'intégrales	59
6.1.1	Lemme de Jordan	59
6.1.2	Intégrales du type $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) dt$	60
6.1.3	Intégrales du type $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$	61
6.1.4	Intégrales du type $\int_0^{\infty} x^{-\alpha} F(x) dx$	61
6.1.5	Exemples	62
6.2	Propriétés des fonctions analytiques	64
6.2.1	Théorème de Liouville	64
6.2.2	Principe du maximum	65
6.2.3	Prolongement analytique	66
6.2.4	Pôles et zéros, théorème de Rouché	67
6.2.5	Exemples	68
III	Transformées intégrales	69
7	Intégrale de Lebesgue	71
7.1	Fonction mesurable	71
7.1.1	σ -algèbre et mesure	71
7.1.2	Fonction mesurable	73

7.2	Intégrale de Lebesgue	74
7.2.1	Intégrale de Lebesgue d'une fonction positive	74
7.2.2	Comparaison entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann	75
8	Intégrales de fonctions paramétrées	79
8.1	Suites et séries de fonctions	79
8.1.1	Convergences monotone et dominée	79
8.1.2	Exemples	83
8.2	Intégrales paramétrées	84
8.2.1	Continuité	84
8.2.2	Dérivation	85
8.2.3	Intégrale double et permutation d'intégrales	85
9	Les espaces L^p	87
9.1	Espaces de Banach et de Hilbert	87
9.1.1	Exemples	88
9.2	Les espaces de Lebesgue L^p	89
9.3	La convolution dans L^1	90
10	La transformée de Fourier	93
10.1	Transformée de Fourier dans L^1	93
10.1.1	Exemples	95
10.2	Transformée de Fourier inverse et convolution	96
10.2.1	Exemple	98
10.3	Transformée de Fourier dans L^2	98
10.3.1	Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$	98
10.3.2	Exemple	100
10.4	Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ ou $L^2(\mathbb{R}^n)$	100
11	Transformée de Laplace	103
11.1	Définition et propriétés	103
11.2	Inversion de la transformée de Laplace	105
11.3	Applications	106
12	Transformées intégrales des distributions	109
12.1	Fonctions-tests et distributions	110
13	Tables de transformées intégrales	111
13.1	Transformées de Fourier	111
13.2	Transformées de Laplace	112

Première partie

Éléments d'analyse vectorielle

Chapitre 1

Opérateurs différentiels

Nous donnons ici une brève introduction des principaux opérateurs différentiels et de leurs propriétés essentielles. Mais d'abord rappelons quelques notions de topologie que nous utiliserons dans ces notes.

1.1 Éléments de topologie

Nous rappelons ici quelques définitions de notions topologiques élémentaires. L'essentiel de ces notes concerne des espaces vectoriels de dimension finie, en l'occurrence \mathbb{R}^n muni d'une norme $\|\cdot\|$. Si on ne le précise pas, ça peut être une norme quelconque, mais il est préférable d'utiliser la norme euclidienne (liée au produit scalaire) :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Toutes les normes sont équivalentes (dans un espace normé de dimension finie) et engendrent la même topologie, c'est à dire la même famille d'ouverts.

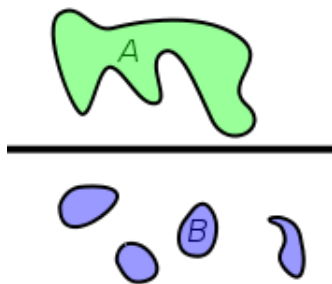
1. Une *boule ouverte* centrée en v_0 de rayon $\varepsilon > 0$ c'est l'ensemble

$$B(v_0, \varepsilon) = \{v = (x_1, \dots, x_n) : \|v - v_0\| < \varepsilon\}.$$

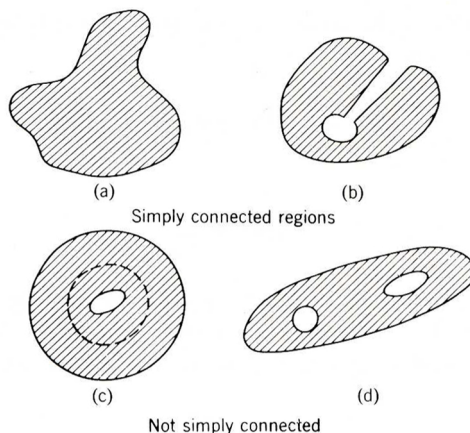
2. Une *boule fermée* centrée en v_0 de rayon $\varepsilon > 0$ c'est l'ensemble

$$\{v = (x_1, \dots, x_n) : \|v - v_0\| \leq \varepsilon\}.$$

3. Un ensemble *ouvert*, ou tout simplement un ouvert, Ω est un ensemble tel que pour tout $v \in \Omega$, il existe une boule ouverte $B(v, \varepsilon)$ entièrement contenue dans Ω . Une boule ouverte est un ouvert.
4. Une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
5. Un *fermé* est un ensemble dont le complément est ouvert.
6. Une réunion finie de fermés est un fermé. Une intersection quelconque de fermés est un fermé.
7. Un ensemble est dit borné s'il est contenu dans une boule.
8. Un ensemble est dit compact (dans \mathbb{R}^n ou tout autre espace normé de dimension finie) s'il est fermé et borné.
9. Un ensemble est dit *connexe* s'il ne peut pas être mis sous la forme d'une réunion d'ouverts non vides disjoints. Dans \mathbb{R} les ensembles connexes sont des intervalles (finis ou infinis).

FIGURE 1.1 – Dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{C} : A connexe, B non connexe

10. Un *domaine* est un ouvert connexe.
11. Un ensemble est dit simplement connexe s'il est connexe et que tout chemin continue peut être réduit continûment à un point. En d'autres termes, un ensemble simplement connexe ne contient pas de "trous" (cf. figure 1.2, a et b).

FIGURE 1.2 – Simple connexité dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{C}

1.2 Gradient, laplacien, jacobienne

La dérivation d'une fonction à plusieurs variables fait intervenir des opérateurs différentiels que nous introduisons ici.

1.2.1 Gradient d'une fonction scalaire

Soit f une fonction scalaire définie sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^3 . On dit qu'elle est différentiable au point $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ si

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) + c_0(z - z_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\|),$$

où $o(\|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\|)$ est "petit" dans le voisinage de (x_0, y_0, z_0) dans le sens précis suivant :

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} \frac{o(\|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\|)}{\|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\|} = 0.$$

Le symbole $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque de \mathbb{R}^3 , par exemple la norme euclidienne. Pour le vecteur $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, cette norme est définie par

$$\|(v_1, v_2, v_3)\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}},$$

où $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ désigne le produit scalaire de deux vecteurs \mathbf{v} et \mathbf{w} .

Le vecteur (a_0, b_0, c_0) est donné par

$$(a_0, b_0, c_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right).$$

Il est appelé vecteur gradient de la fonction f au point (x_0, y_0, z_0) et il est souvent noté **grad** f . On précise le point (x_0, y_0, z_0) si nécessaire. Une autre notation fait intervenir les opérations de dérivation explicitement :

$$\mathbf{grad} = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Le symbole ∇ est appelé *nabla*^a. On écrira donc, pour $\mathbf{v} = (x, y, z)$ la définition de la différentiabilité par

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{v}_0) &= \mathbf{grad} f(\mathbf{v}_0) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + o(\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|) \\ &= \nabla f(\mathbf{v}_0) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + o(\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

1.2.2 Le laplacien

Pour une fonction f de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} , de classe C^2 , on définit le laplacien^b

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

qu'on peut aussi noter $\Delta f = \nabla^2 f$. Il peut aussi s'appliquer à une fonction vectorielle $\mathbf{F} = (P, Q, R)$:

$$\Delta \mathbf{F} = \nabla^2 \mathbf{F} = (\Delta P, \Delta Q, \Delta R).$$

1.2.3 Jacobienne d'une fonction vectorielle

On peut définir la jacobienne^c de toute fonction dérivable d'un espace vectoriel \mathbb{R}^n dans un espace vectoriel \mathbb{R}^m . Nous nous limiterons ici aux fonctions vectorielles de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 . Le principe est le même. Soit \mathbf{F} la fonction définie par

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

où P, Q et R sont des fonctions scalaire sur \mathbb{R}^3 . Elle est différentiable en \mathbf{v}_0 si

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{v}_0) = \partial \mathbf{F}(\mathbf{v}_0) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + o(\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_0\|),$$

a. Introduit par Hamilton et appelé nabla (harpe) par Heaviside. William Rowan Hamilton (1805-1865) est un mathématicien, physicien et astronome irlandais. Oliver Heaviside (1850-1925) est un physicien britannique autodidacte.

b. Du nom de Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), mathématicien, astronome et physicien français.

c. Du nom de Carl Gustav Jakob **Jacobi** (1804-1851), mathématicien allemand.

où $\partial \mathbf{F}(\mathbf{v}_0)$ est la matrice **jacobienne**

$$\partial \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}$$

calculée au point \mathbf{v}_0 . On peut la noter aussi

$$\partial \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \nabla P \\ \nabla Q \\ \nabla R \end{pmatrix},$$

à condition de considérer dans cette écriture que les vecteurs gradients sont des vecteurs lignes^d.

1.2.4 Quelques conséquences directes

Elles sont classiques et simples à établir.

1. Linéarité : pour toute constante λ , on a $\nabla(\lambda f + g) = \lambda \nabla f + \nabla g$.
2. $\nabla f g = g \nabla f + f \nabla g$
3. Linéarité aussi pour la jacobienne : pour toute constante λ , on a

$$\partial(\lambda \mathbf{F} + \mathbf{G}) = \lambda \partial \mathbf{F} + \partial \mathbf{G}.$$

4. Jacobienne d'une fonction composée

$$\partial(\mathbf{F} \circ \mathbf{G}) = (\partial \mathbf{F} \circ \mathbf{G}) \times \partial \mathbf{G},$$

où \times désigne le produit de matrice.

5. Si f est une fonction à 3 variables et S la surface $f(x, y, z) = k$, où k est une constante. Alors le vecteur $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$, s'il est non nul, est orthogonal au plan tangent à la surface S en $\mathbf{v}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. En effet le plan tangent a pour équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{v}_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{v}_0)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{v}_0)(z - z_0) = 0.$$

Et le vecteur

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{v}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{v}_0), \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{v}_0) \right)$$

est orthogonal à ce plan. Dans le cas particulier où la surface est donnée par l'équation $z = \varphi(x, y)$, le plan tangent est donné par l'expression

$$z = z_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0), \quad z_0 = \varphi(x_0, y_0)$$

et le vecteur

$$\left(1, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

est orthogonal à cette surface.

d. C'est en fait leur vraie nature : c'est bien des matrices 1×3 , jacobienues d'une application de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} . Nous les écrivons parfois sous la forme de vecteurs colonnes, par abus.

1.3 Divergence, rotationnel

Ces opérateurs différentiels sont définis sur des fonctions vectorielles. Soit

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)).$$

une fonction de classe C^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^3 , c'est à dire que chacune des fonctions scalaires P, Q, R est continuellement dérivable sur ce même ouvert. On définit alors l'opérateur divergence par

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{F}.$$

L'écriture $\nabla \cdot \mathbf{F}$, souvent utilisée, a un sens formel : c'est le produit scalaire du vecteur formel ∇ avec le vecteur \mathbf{F} de \mathbb{R}^3 .

On peut aussi exprimer la divergence de la manière suivante

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \operatorname{Tr} (\partial \mathbf{F}),$$

où Tr désigne la trace de la matrice correspondante.

Le rotationnel **rot** est un opérateur différentiel défini par

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \nabla \wedge \mathbf{F},$$

où \wedge désigne le produit vectoriel. Autrement dit

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix},$$

c'est à dire

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

ou alors **rot** \mathbf{F} est le vecteur

$$\mathbf{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

1.4 Propriétés des opérateurs

Pour tous les opérateurs différentiels introduits ici la linéarité découle directement de leur définition. D'une manière générale, les opérateurs introduits ici, appliqués à des fonctions scalaires ou vectorielles de classe C^2 au moins, vérifient aussi les relations de composition suivantes :

1. **rot**(**grad**) = 0,
2. $\operatorname{div}(\mathbf{rot}) = 0$,
3. **rot** (**rot**) = **grad** (div) - Δ ,
4. $\Delta = \operatorname{div}(\mathbf{grad})$.

Ces relations peuvent être obtenus par un calcul direct. On peut en déduire d'autres relations. Nous attirons l'attention du lecteur sur les deux premières relations qui ont des significations physiques importantes :

1. Un champ dérivant d'un potentiel a un rotationnel nul (pas de *tourbillon*).

2. Pas de divergence pour un flux tournant.
3. Quelques autres relations, dites “formules de Leibnitz”, pour divers produits :

$$3.1 \quad \operatorname{div}(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) = -\mathbf{F} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F},$$

$$3.2 \quad \operatorname{rot}(\mathbf{F} \wedge \mathbf{G}) = \mathbf{F} \cdot \operatorname{div} \mathbf{G} - (\mathbf{F} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{G} - \mathbf{G} \cdot \operatorname{div} \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{F},$$

$$3.3 \quad \operatorname{div}(f \cdot \mathbf{F}) = f \cdot \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{F},$$

$$3.4 \quad \operatorname{rot}(f \cdot \mathbf{F}) = f \cdot \operatorname{rot} \mathbf{F} + \operatorname{grad} f \wedge \mathbf{F}.$$

Il existe encore de nombreuses formules liant les opérateurs différentiels.

1.5 Intégrales multiples

L'intégrale de Riemann bien connue sur \mathbb{R} se généralise à des intégrales sur des compacts dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 par des intégrales doubles et triples sous certaines conditions que nous rappelons ici. Cela reste vrai pour des espaces plus généraux mais nous ne l'utiliserons pas ici. La théorie plus générale et plus profonde de l'intégrale de Lebesgue^e (cf. chapitre 7) permet de dépasser les difficultés de l'intégrale de Riemann surtout quand il s'agit de domaine qui ne sont plus compacts.

Le mode de calcul des intégrales multiples le plus simple est celui qui consiste à réduire l'ordre d'intégration quand c'est possible, c'est la technique dite de Fubini^f.

Théorème 1.1 (Fubini) *Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ le compact défini par les inégalités*

$$a \leq x \leq b, \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

où φ_1, φ_2 sont deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors toute fonction f , continue sur K , est intégrable (au sens de Riemann) sur K et on a

$$\iint_K f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

De même, si K peut être défini par

$$c \leq y \leq d, \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),$$

alors

$$\iint_K f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Un résultat analogue se formule pour les intégrales sur un compact de \mathbb{R}^3 .

Théorème 1.2 *Soit $K \subset \mathbb{R}^3$ le compact défini par*

$$(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y),$$

où φ_1, φ_2 sont deux fonctions continues sur D , compact quarrable^g de \mathbb{R}^2 . Alors toute fonction f , continue sur K , est intégrable (au sens de Riemann) sur K et on a

$$\iiint_K f(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_D \left(\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy.$$

e. Henri-Léon Lebesgue (1875-1941), mathématicien français.

f. Guido Fubini (1879-1943) est un mathématicien italien.

g. Nous reviendrons plus loin sur ce concept, chapitre 3, paragraphe 3.1.1

Rappelons également la formule de changement de variables pour les intégrales multiples. Le changement de variables est réalisé par une bijection de classe C^1 dans les deux sens : un difféomorphisme.

Théorème 1.3 Soit U et V deux ouverts de \mathbb{R}^n . Soit $\Phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de U dans V . Soit

$$J_\Phi : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \det \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)$$

le jacobien, déterminant de la jacobienne $\partial\Phi = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right)_{i,j=1,\dots,n}$ du difféomorphisme. Si f est intégrable sur V et $g = f \circ \Phi \cdot |J_\Phi|$ est intégrable sur U , alors

$$\int_V f(v) dv = \int_U f(\Phi(x)) |J_\Phi| dx.$$

Autrement dit, le terme “correcteur d’échelle” lors d’un changement de variable est le module du jacobien du difféomorphisme.

1.5.1 Exemples

1. Calculer la masse d’une plaque dont la forme est un quart de cercle : $x^2 + y^2 \leq 4$, $x > 0$, $y > 0$, et dont la densité est $x + y$.

Cela revient à calculer l’intégrale

$$I = \iint_A x + y dx dy, \quad A = \{x^2 + y^2 \leq 4, x > 0, y > 0\}.$$

On peut l’écrire sous la forme

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y) dy \right) dx = \int_0^2 \left(x\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{2}(4-x^2) \right) dx$$

Ce qui donne $I = \frac{16}{3}$.

2. Calculer le volume^h du solide Ω compris entre les plans $z = 2x + 3y + 6$ et $z = 2x + 7y + 8$ au dessus du carré du plan xOy dont les sommets sont $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Ce volume est donné par la formule :

$$V_\Omega = \iiint_\Omega dx dy dz.$$

Après une analyse de la position des plans, on peut voir que ce volume est donné par la formule

$$\iiint_\Omega dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_{2x+3y+6}^{2x+7y+8} dz \right) dy \right) dx.$$

Ce qui donne

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (2x + 3y + 6 - 2x + 7y + 8) dy \right) dx = \int_0^1 dx \cdot \int_0^1 (4y + 2) dy = 4.$$

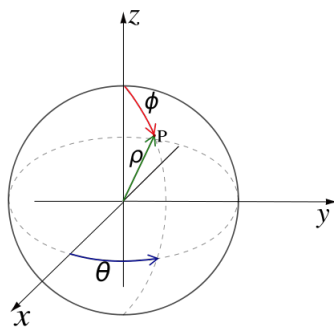
3. Calculer le volume V_0 d’une tranche d’orange d’angle $\pi/6$ et de rayon R .

Il faut passer aux coordonnées sphériques

$$x = r \cos \theta \sin \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \varphi,$$

où r est le rayon, θ la longitude et φ la colatitude ($\frac{\pi}{2}$ – latitude). Le jacobien est

$$J = r^2 \sin \varphi.$$

FIGURE 1.3 – Coordonnées sphériques : $\rho = r, \phi = \varphi$.

Les bornes sont $0 \leq \theta \leq \pi/6$, $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \varphi \leq \pi$. On a alors

$$V_0 = \iiint_{V_0} dx \, dy \, dz = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{\pi/6} r^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr.$$

Ce qui donne

$$V_0 = \frac{r^3}{3} \Big|_0^R \cdot (-\cos \varphi) \Big|_0^\pi \cdot \theta \Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi R^3}{9}.$$

h. Comme pour la longueur d'une courbe ou l'aire d'une surface, on peut donner une définition précise du volume d'un ensemble de \mathbb{R}^3 . On n'utilisera ici que la formule qui donne le volume.

Chapitre 2

Intégrale curviligne : théorème de Green

Dans de nombreuses situations physiques, les propriétés d'un phénomène sur une surface peuvent s'expliquer ou s'exprimer par des actions "dérivées" sur le bord de cette surface. Le théorème de Green^a (on dit parfois de Green-Riemann) décrit une de ces situations. Pour l'exprimer nous avons besoin de donner les notions d'intégrales curvilignes.

2.1 Intégrale curviligne

2.1.1 Courbe rectifiable

C'est une courbe qui a une longueur. Soit une courbe L donnée dans \mathbb{R}^2 par une paramétrisation $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$, c'est à dire

$$L = \{\mathbf{r}(t), t \in [a, b]\}, \quad \mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

On construit sur L une ligne brisée dont les "sommets" sont les points $\mathbf{r}(t_i)$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Cette ligne brisée ("droite par morceaux", ou courbe affine par morceaux) est notée L_n .

On calcule sa longueur

$$|L_n| = \sum_{i=0}^{n-1} \|\mathbf{r}(t_{i+1}) - \mathbf{r}(t_i)\|$$

On pose $\delta = \max(t_{i+1} - t_i)$. Alors si L_n admet une limite quand $\delta \rightarrow 0$, on dit que la courbe est rectifiable. La valeur

$$|L| = \lim_{\delta \rightarrow 0} |L_n|$$

est, par définition, la longueur de la courbe. Elle correspond à la notion intuitive et naturelle de la longueur d'une courbe. *On peut montrer qu'une courbe décrite par une fonction (ou des fonctions) continuellement dérivable est rectifiable.* Une courbe continue n'est pas nécessairement rectifiable.

EXEMPLES : la courbe de von Koch^b n'est pas rectifiable et, dans un certain sens, la côte bretonne non plus. On connaît la côte bretonne comme étant très irrégulière. Si on pouvait mesurer sa longueur, intuitivement, au grain de sable près, elle serait très grande (infinie?).

Définissons la courbe de Von Koch : c'est la limite d'une suite de courbes^c.

a. George Green (1793-1841), physicien et mathématicien britannique, autodidacte.

b. Niels Fabian Helge von Koch (1870-1924), mathématicien suédois.

c. C'est la courbe d'une fonction qui est la limite d'une suite de fonctions.

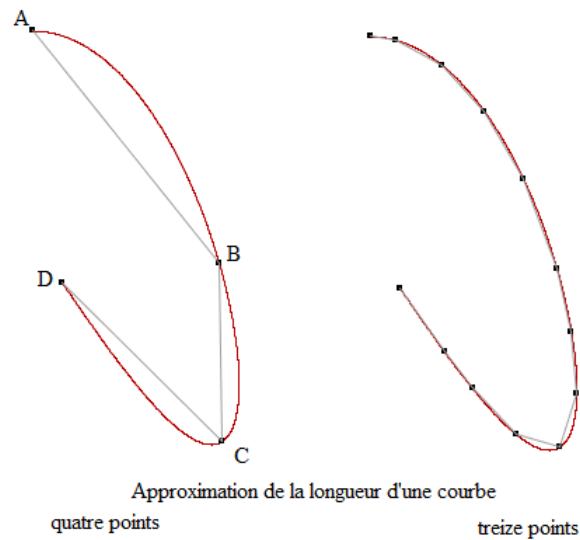
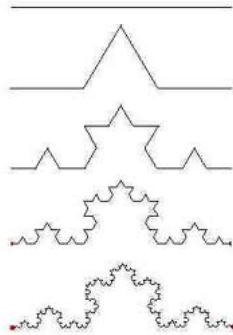


FIGURE 2.1 – Courbe rectifiable

La courbe k_0 est le segment $[0, 1]$ de l'axe des x dans \mathbb{R}^2 .

La courbe k_1 s'obtient en remplaçant le segment $[1/3, 2/3]$ par les côtés d'un triangle équilatéral dont la base est $[1/3, 2/3]$. La courbe k_2 s'obtient en faisant la même opération avec les segment

FIGURE 2.2 – Courbe non rectifiable, celle de von Koch : les 1^{res} étapes

obtenus de k_1 : suppressions du segment $1/3$ du milieu et remplacement par le triangle équilatéral correspondant.

On continue le processus pour obtenir k_n . Toutes ces courbes sont continues. Cette suite de courbes converge **uniformément** (critère de Cauchy^d). La limite est donc une courbe continue k_∞ .

La longueur de la courbe k_n , qui est une ligne brisée, est $|k_n| = (4/3)^n$. Ainsi k_∞ est de "longueur" infinie. Elle n'est pas rectifiable. Signalons que cette courbe n'admet pas de tangente, en aucun point. Les fonctions qui décrivent cette courbe ne sont dérivables nulle part.

2.1.2 Intégrale curviligne d'une fonction scalaire

L'intégrale curviligne d'une fonction scalaire est dite intégrale de 1^{re} espèce. C'est une intégrale de type Riemann^e. Soit $f(x, y)$ une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie sur un ouvert contenant la courbe

d. Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mathématicien français.

e. Bernhard Riemann (1826-1866), mathématicien allemand

rectifiable L . On considère la “somme de Riemann”

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta L_i,$$

où $L_i, i = 0, \dots, n$ est une partition de la courbe L , ΔL_i la longueur de la partie L_i , le point (ξ_i, η_i) étant un point quelconque de L_i . Si la somme S_n admet une limite quand $\lambda = \max\{\Delta L_i, i = 0, \dots, n\} \rightarrow 0$, alors on dit que f est intégrable sur L et

$$\int_L f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta L_i.$$

Pour obtenir la longueur de la courbe il est facile de voir qu’il suffit de poser $f(x, y) \equiv 1$:

$$|L| = \int_L dl.$$

Théorème 2.1 Si la courbe L est de classe C^1 , c’est à dire donnée par une paramétrisation $L = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$, alors on a

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy(t)}{dt}\right)^2} dt.$$

Si la courbe est donnée par une fonction $y = y(x) \in C^1$ sur $[a, b]$, alors l’intégrale sera

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Si la courbe est donnée en coordonnées polaires : $r = r(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, alors

$$\int_L f(x, y) dl = \int_\alpha^\beta f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{r^2 + r'^2} d\theta.$$

PREUVE. Très succinctement. Soit ΔL la longueur d’une corde quelconque de la ligne brisée. On peut écrire :

$$\Delta L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \cdot \Delta t.$$

À la limite, l’intégrale curviligne s’exprime comme une intégrale de Riemann classique, $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ et $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ donnent $\frac{dx(t)}{dt}$ et $\frac{dy(t)}{dt}$, ce qui prouve la première formule du théorème. Les deux autres en découlent. ■

Application

Une application de cette intégrale est, par exemple, le calcul de la masse M_L d’une courbe L dont la densité de masse est $m(x, y)$:

$$M_L = \int_a^b m(x, y) dl.$$

On peut également utiliser cette intégrale pour noter les moments d’inertie, les coordonnées du centre de gravité (et autres) d’un corps qu’on peut assimiler à une ligne (fil).

On retrouve pour ce type d’intégrales les propriétés habituelles de l’intégrale de Riemann : linéarité, majoration, etc.

2.1.3 Intégrale curviligne de fonction vectorielle

C'est l'intégrale d'une fonction vectorielle sur une courbe orientée, dite aussi intégrale curviligne de 2^e espèce.

On se donne une courbe rectifiable L dans \mathbb{R}^2 et une fonction $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ définie sur cette courbe. On subdivise cette courbe en fixant des points $A_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, n$ sur la courbe et on considère un point quelconque $M_i = (\xi_i, \eta_i)$, aussi sur la courbe, entre le point A_i et A_{i+1} . On pose $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ et on considère les sommes

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

Si cette somme admet une limite quand $\delta = \max_{i=0, \dots, n-1} \Delta x_i \rightarrow 0$, alors

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

De la même manière on peut définir, en projetant sur l'axe des y l'intégrale :

$$\int_L Q(x, y) dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$

D'une manière plus générale, pour la fonction vectorielle $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \mapsto \mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

définie sur la courbe L , on peut considérer l'intégrale

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

par les passages à la limite définis plus haut.

Cette intégrale s'appelle intégrale curviligne de 2^e espèce ou intégrale curviligne de la fonction vectorielle $\mathbf{F}(x, y)$.

Application

L'intégrale curviligne de 2^e espèce permet d'exprimer, par exemple, le travail d'une force $\mathbf{F}(x, y)$ le long d'un chemin $L = AB$, cf. Figure 2.3. *Ici le sens de parcours de la courbe L est important.*

Pour calculer ce type d'intégrales il est souvent possible d'utiliser le résultat suivant.

Théorème 2.2 *Supposons que les fonctions P et Q soient continues sur la courbe L de classe C^1 , donnée par la paramétrisation $(\phi(t), \psi(t))$, $t \in [a, b]$. Alors*

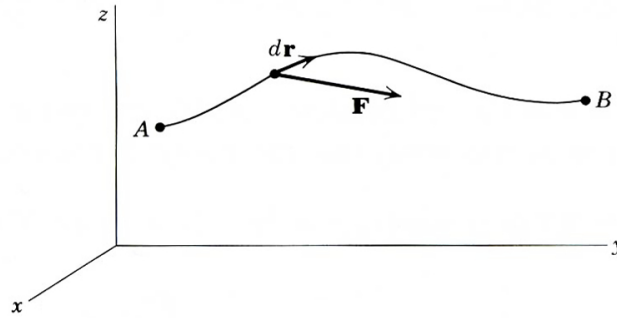
$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y)\phi'(t) + Q(x, y)\psi'(t)] dt.$$

La formule est adaptée en conséquence si la courbe est donnée par l'équation $y = f(x)$, $x \in [a, b]$:

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))) y'(x) dx$$

et d'une manière analogue si $x = g(y)$, $y \in [c, d]$.

PREUVE. La première formule peut être obtenue en posant $dx = \phi'(t) dt$ et $dy = \psi'(t) dt$. Le reste en découle. La démonstration formelle est plus laborieuse, mais elle revient à ça. ■

FIGURE 2.3 – Travail d'une force le long d'un chemin AB

2.1.4 Exemples

1. Calculer l'intégrale

$$I = \int_C y^2 dx - x^2 dy,$$

dans le cas où : a) C est le cercle unité centré en $(0, 0)$; b) C est le cercle unité centré en $(1, 1)$.

Réponses :

a) On utilise la paramétrisation $x = \cos t$, $y = \sin t$, avec $t \in [0, 2\pi]$. On obtient alors, en utilisant le théorème 2.2, l'expression

$$I = - \int_0^{2\pi} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt,$$

ce qui nous donne $I = 0$.

b) La paramétrisation de la courbe est dans ce cas : $x = \cos t + 1$ et $y = \sin t + 1$. On obtient

$$I = - \int_0^{2\pi} (2 + \sin t + \cos t + \sin^3 t + \cos^3 t) dt = -4\pi.$$

2. Calculer les intégrales

$$I = \int_L 2xy dx + x^2 dy, \quad J = \int_L xy dx + (y - x) dy$$

le long les courbes : a) $y^2 = x$; b) $y = x$; c) $y = x^2$; d) $y = x^3$ entre les points $O = (0, 0)$ et $A = (1, 1)$.

Réponses :

a) On a $x = y^2$, $dx = 2y dy$ et $0 \leq y \leq 1$. On aura donc

$$I = \int_0^1 5y^4 dy = 1, \quad J = \int_0^1 (2y^4 - y^2 + y) dy = \frac{17}{30}.$$

b) Ici $y = x$, $dy = dx$ et $0 \leq x \leq 1$. On a donc

$$I = \int_0^1 3x^2 dx = 1, \quad J = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

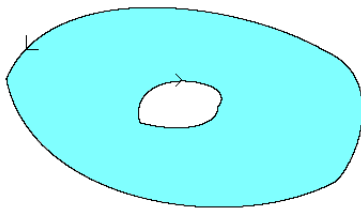


FIGURE 2.4 – Sens positif d’un bord de domaine

c) Ici $y = x^2$, $dy = 2x dx$ et $0 \leq x \leq 1$. On a donc

$$I = \int_0^1 4x^3 dx = 1, \quad J = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2) dx = \frac{1}{12}.$$

d) Ici $y = x^3$, $dy = 3x^2 dx$ et $0 \leq x \leq 1$. On a donc

$$I = \int_0^1 5x^4 dx = 1, \quad J = \int_0^1 (x^4 + 3x^5 - 3x^3) dx = \frac{11}{20}.$$

On remarquera que dans le cas de l’intégrale I les valeurs selon des chemins différents sont identiques alors que pour l’intégrale J ce n’est pas le cas. Cette situation n’est pas fortuite, nous y reviendrons plus loin (cf. le théorème 2.4).

Par ailleurs, si au lieu d’aller de O en A , on calculait l’intégrale de A en O , les signes de toutes les intégrales changeraient.

2.2 Le théorème de Green

L’expression

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

est une forme différentielle (plus précisément une 1-forme différentielle) dans \mathbb{R}^2 . L’intégrale curviligne (de 2^e espèce) est en fait l’intégrale d’une 1-forme différentielle. L’intégrale de Riemann $\int_a^b f(x) dx$ est aussi l’intégrale de la 1-forme différentielle $f(x) dx$ donnée dans \mathbb{R} . Nous connaissons bien la formule fondamentale

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

où F est la primitive de f , $F' = f$. Nous allons établir une formule analogue pour l’intégrale d’une 1-forme différentielle dans \mathbb{R}^2 (elle est valable aussi dans \mathbb{R}^3 avec les extensions requises).

2.2.1 Formule de Green

Cette formule, dite de Green ou de Green-Riemann peut être établie d’après le raisonnement suivant.

Soit $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ deux fonctions de classe C^1 . On considère alors le rectangle (Figure 2.5) $A = [a, b] \times [c, d] \in \mathbb{R}^2$ et $C = \partial\Omega$ la frontière du rectangle, on a alors

$$\iint_A \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy. \quad (2.2.1)$$

Maintenant calculons l'intégrale curviligne $\oint_C Q(x, y) dy$ le long de la frontière du rectangle, dans le sens positif (le rectangle reste toujours à gauche lors du mouvement), le symbole \oint signifie que la courbe est fermée. Le long des côtés horizontaux on a $dy = 0$, alors

$$\begin{aligned}\oint_C Q(x, y) dy &= \int_c^d Q(b, y) dy + \int_d^c Q(a, y) dy \\ &= \int_c^d Q(b, y) dy - \int_c^d Q(a, y) dy \\ &= \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy.\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

Les deux expressions (2.2.1) et (2.2.2) donnent alors

$$\iint_A \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx dy = \oint_C Q(x, y) dy.\tag{2.2.3}$$

D'une manière similaire on obtient

$$\iint_A \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dx dy = - \oint_C P(x, y) dx.\tag{2.2.4}$$

Alors les relations (2.2.3) et (2.2.4) donnent

$$\oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.\tag{2.2.5}$$

qui est la formule de Green pour le rectangle $A = [a, b] \times [c, d]$.

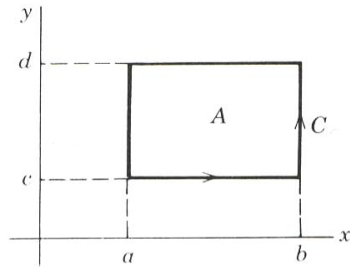


FIGURE 2.5 – Formule de Green pour un rectangle

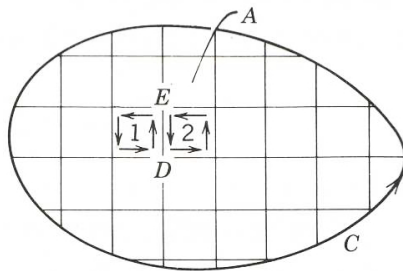
Le résultat général se formule comme suit.

Théorème 2.3 Soit $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ une fonction vectorielle (un champ) de classe C^1 sur un ensemble A régulier^f à frontière orientée positivement. Alors

$$\oint_{\partial A} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx dy.\tag{2.2.6}$$

PREUVE. La démonstration se fait en inscrivant dans le domaine A un pavage de carrés (Figure 2.6) dont les aires tendent vers 0 et qui recouvrent à la limite tout le domaine A . ■

f. Compact à frontière de classe C^1 par morceaux.

FIGURE 2.6 – Formule de Green sur un ensemble A

2.2.2 Exemples

On considère le domaine Ω qui est une “lune” parabolique située entre la droite $y = x$ et la parabole $y = x^2$ quand $x \in [0, 1]$. On étudie deux cas :

1. $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x^2)$, c’est à dire : $P(x, y) = y^2$, $Q(x, y) = x^2$. Le résultat calculé soit en utilisant l’intégrale curviligne, soit en utilisant l’intégrale double est : $1/30$.

Faisons le calcul direct.

$$I = \int_C y^2 dx + x^2 dy = \int_{C_1} y^2 dx + x^2 dy + \int_{C_2} y^2 dx + x^2 dy = I_1 + I_2,$$

où $C_1 = \{y = x^2, 0 \leq x \leq 1\}$ et $C_2 = \{y = x, 0 \leq x \leq 1\}$ tel que $C_1 \cup C_2$ en tenant compte du sens de parcours positif. La première intégrale donne, en posant $y = x^2$ et $dy = 2x dx$:

$$I_1 = \int_0^1 (x^4 + 2x^3) dx = \frac{1}{5} + \frac{2}{4} = \frac{7}{10}.$$

La deuxième, pour $y = x$ (en tenant compte du sens d’intégration) :

$$I_2 = \int_1^0 (x^2 + x^2) dx = -\frac{2}{3}.$$

Ce qui donne le résultat énoncé : $I = \frac{1}{30}$.

Faisons le calcul en utilisant la formule de Green-Riemann. On a

$$I = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_{\Omega} (x - y) dx dy,$$

où Ω est l’intérieur de la courbe C . On obtient facilement

$$I = 2 \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x - y) dy \right) dx = 2 \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{30}.$$

2. $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2)$, c’est à dire : $P(x, y) = 2xy$, $Q(x, y) = x^2$. Le résultat est : 0. En effet, dans ce cas $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2x - 2x = 0$ et le calcul en utilisant l’intégrale curviligne donne le même résultat (cf. Exemple 2.1.4,2, en tenant compte du sens).

2.2.3 Lien entre les deux types d'intégrales. Formule de la divergence

Les deux intégrales s'appliquent à des fonctions de nature différentes : scalaire ou vectoriel. Nous allons tenter d'unifier, dans un certain sens, ces deux concepts. On utilisera la formule de Green.

Soit A un domaine régulier et ∂A sa frontière. Notons par \mathbf{r} le vecteur $(x, y) \in \partial A$. Le vecteur tangent élémentaire est alors donné par

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy.$$

La normale extérieure est

$$\mathbf{n} dl = \mathbf{i} dy - \mathbf{j} dx,$$

où \mathbf{n} est un vecteur unitaire et $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Soit $\mathbf{V}(x, y) = (V_1(x, y), V_2(x, y))$ une fonction vectorielle de classe C^1 . Posons $P = -V_2$ et $Q = V_1$. On a alors

$$P dx + Q dy = -V_2 dx + V_1 dy = (\mathbf{i}V_1 + \mathbf{j}V_2) \cdot (\mathbf{i} dy - \mathbf{j} dx) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dl.$$

La formule de Green donne alors

$$\int_{\partial A} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dl = \oint_{\partial A} P dx + Q dy = \int_{\partial A} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dl = \iint_A \left(\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} \right) dx dy$$

La première intégrale étant maintenant une intégrale curviligne de 1^{re} espèce, appliquée à une

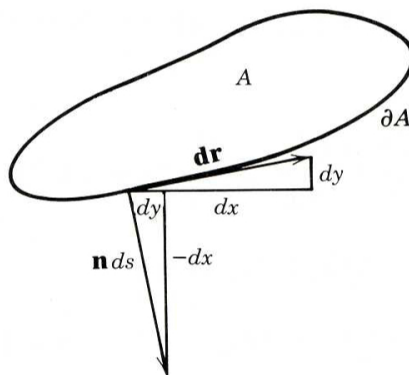


FIGURE 2.7 – Formule de la divergence

fonction scalaire. En tenant compte de la définition de la divergence, quitte à prendre la composante $V_3 = 0$, on peut écrire cette relation comme suit

$$\int_{\partial A} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dl = \iint_A \operatorname{div} \mathbf{V} dx dy.$$

Cette formule peut être considérée comme le théorème de la divergence (ou d'Ostrogradsky^g) dans le plan. Dans le chapitre suivant, elle sera donnée dans l'espace \mathbb{R}^3 (cf. Théorème 3.3). Sa signification physique est la suivante : **le flux global d'un champ de vecteur à travers le bord d'un domaine est égal à la somme de la divergence dans ce domaine.**

^g. Mikhaïl Vassilievitch Ostrogradsky (1801-1862), mathématicien et physicien d'origine ukrainienne dans la Russie tsariste.

2.3 Champs dérivant d'un potentiel dans \mathbb{R}^2

Soit $\mathbf{F}(x, y)$ une fonction vectorielle définie et continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On dit que la fonction vectorielle (champ) $\mathbf{F}(x, y)$ dérive d'un potentiel si

$$\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{grad} f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

pour une fonction scalaire $f(x, y)$, dite “potentiel”.

Ces champs jouent un rôle particulièrement important dans la description de nombreux phénomènes physiques.

La formule de Green permet de décrire une propriété importante de ces champs.

Théorème 2.4 *Soit Ω un domaine simplement connexe de \mathbb{R}^2 . Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$ dérive d'un potentiel,
2. Pour toute courbe régulière^h $C \subset \Omega$, on a

$$\oint_C P dx + Q dy = 0,$$

3. Soit Γ_1 et Γ_2 deux chemins (courbes) joignant deux points A et B dans Ω , on a

$$\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy.$$

Autrement dit : l'intégrale entre A et B ne dépend pas du chemin.

Il est important de souligner que le domaine ne doit pas comporter de “trou”. Un chemin fermé ne doit pas contourner des points qui n'appartiennent pas à l'ensemble Ω (cf. définition dans le chapitre 1 et la figure 1.2, page 4).

PREUVE. On a $\mathbf{F} = \mathbf{grad} f$ si et seulement si $P = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Par conséquent,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Comme $\mathbf{F} \in C^1(\Omega)$, alors $f \in C^2$ et les dérivées mixtes coïncident. Ce qui équivaut à

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Le théorème de Green implique l'équivalence avec $\oint_C P dx + Q dy = 0$.

Pour obtenir la dernière proposition, considérons le chemin C fermé entre le point A et le point B constitué par le chemin Γ_1 (de A à B) et le chemin $-\Gamma_2$, autrement dit le chemin Γ_2 parcouru en sens inverse (de B à A) : $C = \Gamma_1 \cup (-\Gamma_2)$. On a alors

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy &= \int_{\Gamma_1} P dx + Q dy + \int_{-\Gamma_2} P dx + Q dy \\ &= \int_{\Gamma_1} P dx + Q dy - \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

h. De classe C^1 par morceaux.

Ainsi, $\mathbf{F} = \text{grad } f$ est équivalent à

$$\int_{\Gamma_1} P \, dx + Q \, dy = \int_{\Gamma_2} P \, dx + Q \, dy.$$

■

La signification physique est la suivante : le travail réalisé par un champ dérivant d'un potentiel entre deux points A et B ne dépend pas du chemin choisi.

Remarque 2.5 Sur le plan mathématique, la phrase « le champ \mathbf{F} dérive d'un potentiel » a la signification suivante : l'expression $P \, dx + Q \, dy$ est une *différentielle exacte*. Il existe une fonction f dont la forme $P \, dx + Q \, dy$ est la différentielle

$$P \, dx + Q \, dy = \mathrm{d}f.$$

Chapitre 3

Formules de Stokes et d'Ostrogradsky

3.1 Intégrale de surface

3.1.1 Surface quarrable

La définition d'une surface quarrable est proche de celle d'une courbe rectifiable. Pour éviter les difficultés nous supposons que cette surface dans \mathbb{R}^3 est donnée par une paramétrisation :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in \Omega,$$

où Ω est un domaine régulier de \mathbb{R}^2 . On procède par un pavage $\{\Omega_i, i = 1, \dots, n\}$ de l'ensemble Ω qui converge vers cet ensemble. Ce pavage induit une partition $\{S_i, i = 1, \dots, n\}$ de la surface S . On choisit d'une manière arbitraire des points $M_i \in \Omega_i$ et on considère les projections des ensembles S_i sur les plans tangents à S en M_i . Soit σ_i les aires de ces ensembles plans. On dit que la surface S est quarrable si la somme

$$\sum_{i=0}^n \sigma_i$$

admet une limite quand le pavage $\{\Omega_i\}$ tend vers Ω et le diamètre des pavés tend vers 0.

Cette définition, pas très formalisée, permet de construire une intégrale de surface. Comme pour une courbe rectifiable, une surface quarrable est suffisamment régulière pour qu'on puisse "calculer" son aire. On admettra facilement que la continuité des fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ ne suffit pas. Par contre si les fonctions sont de classe $C^1(\Omega)$, alors la surface est quarrable.

3.1.2 Intégrale de surface de fonction scalaire

Soit S une surface quarrable de \mathbb{R}^3 , éventuellement donnée par la paramétrisation

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

et une partition $\{S_i, i = 1, \dots, n\}$ de la surface S dont les aires des projections sur le plan tangent sont σ_i , alors

$$\int_S f(x, y, z) \, dS = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \sigma_i,$$

le scalaire δ étant le diamètre de la subdivision construite dans le paragraphe précédent.

On peut calculer l'intégrale de surface comme une intégrale double dans le cas où la fonction est continue et la paramétrisation est régulière. Notons par \mathbf{r} le **vecteur** $(x, y, z) \in S^a$.

a. En fait c'est aussi le **point** courant $M(x, y, z)$.

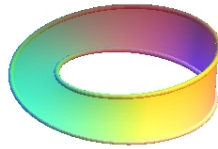


FIGURE 3.1 – La surface de Möbius : une seule face

Théorème 3.1 Soit S une surface de \mathbb{R}^3 donnée par la paramétrisation de classe $C^1(\Omega)$ et $f(x, y, z)$ une fonction continue de S dans \mathbb{R} , alors

$$\int_S f(x, y, z) \, dS = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \, du \, dv,$$

où $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right)$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$. Le signe \wedge représente le produit vectoriel des deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Si la surface S est donnée par la fonction $z = z(x, y)$ de classe C^1 . Alors

$$\int_S f(x, y, z) \, dS = \iint_{\Omega} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right|^2} \, dx \, dy$$

PREUVE. Nous donnons une idée de la démonstration. L'aire élémentaire σ_i de la définition de l'intégrale de surface est celle d'un parallélogramme engendré par les vecteurs $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(M_i)\Delta u$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(M_i)\Delta v$. Sa valeur est donnée par la norme du produit vectoriel. En passant à la limite, on obtient le résultat (la première formule). La seconde formule est l'expression de la première pour ce cas particulier de paramétrisation :

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

■

Applications

L'expression $\int_S f(x, y, z) \, dS$ peut représenter la masse d'une surface S dont la densité en chaque point $M = (x, y, z)$ est $f(x, y, z)$.

Si $f(x, y, z) = 1$, cette même expression représente aussi l'aire de la surface S . On peut également utiliser cette intégrale pour noter les moments d'inertie, les coordonnées du centre de gravité, etc.

D'autres interprétations physiques sont possibles.

3.1.3 Intégrale de surface de fonction vectorielle

C'est l'intégrale de surface de 2^e espèce. Ici la surface considérée doit être orientée, elle a deux faces : il existe un champ de vecteurs normaux $\mathbf{n}(x, y, z)$, continu en tout point de la surface (contrairement à des surfaces comme la surface de Möbius qui n'a qu'une seule face). On conviendra que la direction \mathbf{n} est positive et $-\mathbf{n}$ est négative. Cette orientation doit être cohérente avec l'orientation de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 noté $0xyz$ et engendrée par les vecteurs unitaires i, j, k tels que $k = i \wedge j$. On se donne une fonction vectorielle

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \in C^1,$$

plus précisément de classe C^1 sur un ouvert contenant la surface S . L'intégrale que nous nous proposons d'étudier s'écrit

$$\int_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy.$$

Définissons chacun des termes, comme pour l'intégrale curviligne.

La surface S est partitionnée en une famille d'ensemble disjoints $S_i, i = 1, \dots, n$ séparés par des courbes régulières. Ces surfaces sont projetées sur le plan Oyz et donnent les projections Δ_i . Soit $M_i = (x_i, y_i, z_i)$ un point de S_i . On considère alors la somme

$$\sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta_i.$$

Si cette somme admet une limite quand le diamètre des partitions tend vers 0, cette limite est, par définition, l'intégrale

$$\int_S P(x, y, z) dy dz.$$

En procédant de la même manière pour Q et R , mais en projetant sur les plans Oxz et Oxy respectivement, et en admettant que les limites correspondantes existent, on obtient l'intégrale de surface :

$$\int_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy.$$

La nature de cette intégrale peut être aussi clarifiée et explicitée par le résultat suivant.

Théorème 3.2 *Soit S une surface régulière paramétrée par*

$$\mathbf{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in \Omega$$

*et $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ une fonction **vectorielle** continue sur S . Alors*

$$\begin{aligned} \int_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy = \\ \iint_{\Omega} \left\langle \mathbf{F}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\rangle du dv, \end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire. Le second terme est parfois noté simplement

$$\iint_{\Omega} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v) du dv. \quad (3.1.1)$$

Comme on le voit, ici la situation est moins simple que pour l'intégrale curviligne (comparer avec le théorème 2.2).

Cependant, une extension de la formule de Green-Riemann à la dimension supérieure est possible aussi.

3.2 Formule d'Ostrogradsky

Cette formule, qui joue un rôle important en physique, est aussi appelée formule de la divergence.

Théorème 3.3 (Ostrogradsky) Soit Ω une domaine régulier de \mathbb{R}^3 et $\partial\Omega$ sa frontière (surface régulière). Soit $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ une fonction vectorielle de classe $C^1(\Omega)$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

PREUVE. On écrit de deux manières différentes les flux sortant du volume (au sens algébrique) et traversant la surface, bord du volume. ■

Comme pour l'intégrale curviligne, on peut établir le lien qu'il y a entre les deux types d'intégrales. Soit \mathbf{n} le vecteur unitaire de la normale extérieure (positive) à la surface S , alors on a

$$\int_S P \, dy \, dz + Q \, dx \, dz + R \, dx \, dy = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (3.2.2)$$

On peut comparer cette expression avec la formule (3.1.1) donnée dans le théorème : on a tout simplement $\mathbf{n} \, dS = (\mathbf{r}_u \wedge \mathbf{r}_v) \, du \, dv$ pour une paramétrisation $\mathbf{r}(u, v)$ de la surface.

En fait, l'expression (3.2.2) peut être utilisée pour définir l'intégrale de surface d'une fonction vectorielle.

3.3 Théorème de Stokes

On évoque souvent la formule de Stokes ^b.

3.3.1 Formule de Stokes

Ce résultat donne un lien entre une intégrale curviligne d'une fonction vectorielle et une intégrale de surface. Lien entre un champ de vecteur sur une ligne et un champ de vecteur sur une surface. Les applications en électricité sont nombreuses et fondamentales.

Théorème 3.4 On considère une surface S régulière à deux faces et ∂S son bord orienté. Soit \mathbf{F} une fonction vectorielle (un champ de vecteurs) de classe C^1 sur un ouvert contenant $S \cup \partial S$. Alors on a

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \\ \int_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \, dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx \, dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (3.3.1)$$

où par $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ on note le vecteur tangent à la courbe ∂S .

Attention : la formule est vraie pour une surface à bord. Voir figure 3.2.

^b. George Gabriel Stokes (1819-1903), mathématicien et physicien britannique.

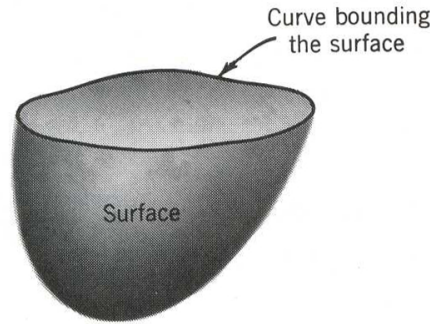


FIGURE 3.2 – Surface à bord, 2 faces

3.3.2 Exemple

Soit le champ de vecteur $\mathbf{F}(x, y, z) = (4y, x, 2z)$. On considère la surface S définie par $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, c'est à dire la demi-sphère supérieure de rayon $a > 0$.

1. Déterminer ∂S .
2. Calculer $I = \oint_{\partial S} P dx + Q dy + R dz$,
3. Calculer $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ directement.
4. Calculer la même intégrale en utilisant la formule de Stokes.

Solution

1. Le bord de la surface est le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.
2. Pour le calcul de l'intégrale curviligne $\oint_{\partial S} P dx + Q dy + R dz$ il suffit de trouver une paramétrisation de cette courbe. On peut proposer la suivante :

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = 0.$$

On obtient

$$I = \oint_{\partial S} 4y dx + x dy + 2z dz = \int_0^{2\pi} (-4a^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta) d\theta.$$

Et un simple calcul donne alors $I = -3\pi a^2$.

3. Calcul direct de $\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$.

Le vecteur unitaire normal \mathbf{n} est donné par

$$\mathbf{n} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a} \right).$$

Un simple calcul donne $\mathbf{rot} \mathbf{F} = (0, 0, -3)$. On a donc

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -3 \int_S \frac{z}{a} dS.$$

Il faut alors paramétriser S et calculer cette intégrale en utilisant la formule (3.1.1) du théorème 3.2. On peut utiliser les coordonnées sphériques par exemple, mais il est plus simple ici

d'utiliser les coordonnées cartésiennes. L'équation de la surface étant $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, on obtient

$$\mathbf{r} = \left(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right).$$

Et on a donc

$$\int_S \frac{z}{a} dS = \frac{1}{a} \iint_C \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y\| dx dy,$$

où C est le disque $x^2 + y^2 \leq 1$ dans le plan xOy . La dernière intégrale est une intégrale double qu'on peut résoudre facilement après avoir calculé

$$\mathbf{r}_x = \left(1, 0, \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right), \quad \mathbf{r}_y = \left(0, 1, \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \right),$$

le produit vectoriel de ces deux vecteurs

$$\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y = \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1 \right),$$

et sa norme :

$$\|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

On obtient alors

$$\frac{1}{a} \iint_C \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y\| dx dy = \iint_C dx dy = \pi a^2,$$

aire du disque $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Ce qui correspond au résultat attendu

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = -3\pi a^2 = I.$$

4. En utilisant le théorème de Stokes on a directement

$$I = \oint_{\partial S} P dx + Q dy + R dz = \int_S \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (3.3.2)$$

Supposons que nous n'avons pas fait les calculs précédents. La formule (3.3.2) est vraie pour toute surface S_1 régulière dont le bord ∂S_1 est le cercle $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, d'après le théorème de Stokes. En particulier, pour la surface $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, z = 0\}$, disque de rayon a dans le plan $z = 0$. Sa normale unique est le vecteur $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$. On a donc

$$\int_{S_1} \mathbf{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_1 dS = -3 \int_{S_1} dS = -3 \times (\text{aire de } S_1) = -3\pi a^2.$$

3.3.3 Champ dérivant d'un potentiel, différentielle exacte

Comme dans \mathbb{R} , on peut étudier le cas particulier important de champs dérivant d'un potentiel, c'est à dire de fonction vectorielle \mathbf{F} telle qu'il existe une fonction scalaire $f \in C^1$ telle que

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad} f.$$

On dit dans ce cas que le champ \mathbf{F} dérive d'un potentiel. Il est facile de voir que f est défini à une constante près. Comme dans \mathbb{R}^2 on a le résultat suivant.

Théorème 3.5 Soit Ω un ouvert simplement connexe de \mathbb{R}^3 . Alors les trois affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbf{F} = (P, Q, R) \in C^1(\Omega)$ dérive d'un potentiel,
2. Pour toute courbe régulière $C \subset \Omega$, on a

$$\oint_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz = 0,$$

3. Soit Γ_1 et Γ_2 deux chemins (courbes) joignant deux points A et B dans Ω , on a

$$\int_{\Gamma_1} P \, dx + Q \, dy + R \, dz = \int_{\Gamma_2} P \, dx + Q \, dy + R \, dz.$$

Autrement dit : l'intégrale entre A et B ne dépend pas du chemin.

PREUVE. Il suffit d'adapter la démonstration du théorème 2.4. ■

Rappelons que, comme dans le cas du théorème 2.4, il est important de souligner que le domaine ne doit pas comporter de “trou”, il doit être *simplement connexe* : un chemin fermé ne doit pas contourner des points qui n'appartiennent pas à l'ensemble Ω (cf. définition dans le chapitre 1 et la figure 1.2, page 4).

L'interprétation mathématique d'un champ dérivant d'un potentiel est que la forme différentielle

$$\varphi = P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

est une différentielle exacte : $\varphi = df$, pour une certaine fonction scalaire f .

Deuxième partie

Éléments d'analyse complexe

Chapitre 4

Fonctions holomorphes

Comme dans le cas de fonctions réelles, on introduit naturellement les notions de limite et de continuité. Une attention particulière sera accordée à la notion de dérivation qui est spécifique.

L'objet de notre étude est la fonction $f(z)$ définie sur un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ que nous préciserons chaque fois que nécessaire. Le complexe z s'écrit $z = x + iy$ ou $z = re^{i\theta}$. Leurs relations sont

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r^2 = x^2 + y^2;$$

r est le module et θ est l'argument du nombre complexe. L'argument d'un nombre complexe étant défini à $2\pi\mathbb{N}$ près. Nous pouvons écrire f sous la forme

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Les fonctions à deux variables u et v sont les parties réelles et imaginaires de $f : u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f$

4.1 Limite, continuité

On dira que $f(z)$ tend vers $a = \alpha + i\beta$ quand $z = x + iy$ tend vers $z_0 = x_0 + iy_0$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - a| < \varepsilon.$$

Nous écrirons tout simplement

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a.$$

Si la limite existe dans le sens donné, il en découle assez simplement que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x, y) = \alpha, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x, y) = \beta,$$

la réciproque étant vraie. Soulignons que la limite doit être atteinte quelque soit le "chemin" suivi par z tendant vers z_0 , comme pour une fonction à deux variables. Nous le préciserons plus loin par des exemples.

On dit que la fonction est continue en z_0 si elle est définie en ce point et

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Les propriétés habituelles des limites et de la continuité peuvent être facilement vérifiées. En particulier : *une fonction continue sur un compact est bornée et $|f(z)|$ atteint son maximum et son minimum.*

4.1.1 Exemples

1. Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{z^3 + \bar{z}^4}{z\bar{z}} = \frac{(x + iy)^3 + (x - iy)^4}{x^2 + y^2}$$

et cherchons sa limite quand $z \rightarrow z_0 = 0$. On pourrait chercher les limites des parties réelles et imaginaires, mais il est préférable de faire un calcul direct quand c'est possible.

On a

$$|f(z)| \leq \frac{|z|^3 + |z|^4}{|z|^2} \leq |z|^3 \frac{1 + |z|}{|z|^2} \leq |z|(1 + |z|).$$

Ce qui implique

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^3 + \bar{z}^4}{z\bar{z}} = 0.$$

2. On cherche la limite de la fonction

$$f(z) = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quand $z \rightarrow 0$. Si on considère le chemin $z = x$, on obtient

$$\lim_{z=x \rightarrow 0} f(z) = 1$$

et pour $z = iy$, on obtient

$$\lim_{z=iy \rightarrow 0} f(z) = -1.$$

Il n'y a pas de limite pour la fonction $f(z) = \frac{z^2 + \bar{z}^2}{z\bar{z}}$ quand $z \rightarrow 0$.

3. Considérons $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ en $z_0 = 0$. Si on considère le chemin $z = x \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{z=x \rightarrow 0} f(z) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

et pour $z = iy \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{z=iy \rightarrow 0} f(z) = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{1}{y^2}} = +\infty.$$

Mieux encore, pour cette fonction et d'autres, on peut montrer qu'on peut choisir un chemin qui amène la fonction vers n'importe quelle limite sauf peut être une^a.

4.2 Dérivation, fonction holomorphe

Définition 4.1 Soit f une fonction définie sur Ω , ouvert contenant z_0 . On dit que f est holomorphe (dérivable) en z_0 si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A$$

existe. On pose alors $f'(z_0) = A$. On dira que f est holomorphe sur Ω si elle l'est en tout point de Ω .

a. C'est l'objet du théorème de Picard, que nous ne traiterons pas ici.

Analysons cette définition. Elle est équivalente à

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(\Delta z), \quad \Delta z = z - z_0, \quad (4.2.1)$$

où $o(\Delta z)$ est tel que

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o(\Delta z)}{|\Delta z|} = 0.$$

En posant $f'(z_0) = a + ib$, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ et $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ on peut écrire cette même expression comme

$$u(x, y) + iv(x, y) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + o(\Delta z).$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on aboutit à deux relations :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(x_0, y_0) + a\Delta x - b\Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|), \\ v(x, y) &= v(x_0, y_0) + b\Delta x + a\Delta y + o(\|(\Delta x, \Delta y)\|). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Ce qui signifie que les fonctions à deux variables u et v sont différentiables en (x_0, y_0) . En fait nous avons plus que ça.

Théorème 4.2 *La fonction f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si*

1. *les fonctions u et v sont \mathbb{R} -différentiables en (x_0, y_0) ;*
2. *les dérivées partielles de u et v vérifient en (x_0, y_0) les relations*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4.2.3)$$

*Ces deux dernières relations sont appelées **conditions de Cauchy-Riemann**.*

PREUVE. La démonstration découle des relations (4.2.2). On a

$$a = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad b = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

■

Ce résultat souligne que la dérivation complexe est plus forte que la dérivation dans \mathbb{R}^2 . Nous verrons plus loin que c'est une notion **très** forte.

Les propriétés habituelles de la dérivation sont vérifiées : linéarité, produit, quotient, etc. La dérivabilité implique la continuité.

4.2.1 Exemples

1. Fonctions dérivables : polynômes, fractions rationnelles (sauf aux zéros des dénominateurs), les fonctions élémentaires (sauf le logarithme qui posent des problèmes de définition). Nous reviendrons sur la question du logarithme et des puissances non entières. Les règles de calcul de la dérivée sont les mêmes :

- Si $f(z) = z^n$, alors $f'(z) = nz^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- Si $f(z) = h(z)g(z)$, alors $f' = h'g + hg'$.
- Si $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, $g(z) \neq 0$, alors $f'(z) = \frac{h'(z)g(z) - h(z)g'(z)}{g^2(z)}$.

2. Fonctions définies par une série entière :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < R,$$

où R est le rayon de convergence. Sa dérivée est

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}, \quad |z| < R,$$

le rayon de convergence étant le même.

Pour établir ce résultat, remarquons d'abord que les deux séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence. Il suffit pour cela d'utiliser la formule de Cauchy-Hadamard^b

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n a_n|}$$

car $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Les deux séries convergent uniformément à l'intérieur du rayon de convergence. Il suffit alors de passer à la limite sous le signe somme dans l'expression

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{z \rightarrow z_0} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0},$$

où $z_0 \in B(0, R)$. De l'égalité

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = n z_0^{n-1},$$

on obtient directement le résultat.

Il en est de même pour une fonction définie par la série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n, \quad |z - a| < R.$$

La preuve est analogue.

3. Considérons le cas $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Les fonctions $u(x, y) = x$ et $v(x, y) = -y$ sont \mathbb{R} -différentiables partout sur \mathbb{R}^2 . Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées. En effet

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

La fonction n'est pas \mathbb{C} -dérivable. On peut obtenir la même chose par une démonstration directe.

Posons $z - z_0 = \Delta z = r e^{i\theta}$. Il est clair que $\Delta z \rightarrow 0$ si et seulement si $r \rightarrow 0$. On a alors

$$\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{r e^{-i\theta}}{r e^{i\theta}} = e^{-2i\theta}$$

et cette expression n'a pas de limite quand $r \rightarrow 0$.

4. Soit $f(z) = |z|$. Vérifions les conditions de Cauchy-Riemann en utilisant les coordonnées polaires. On a $f(z) = f(r e^{i\theta}) = r$. Par conséquent

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0.$$

b. Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) est un mathématicien français.

La fonction n'est pas holomorphe car les conditions de Cauchy-Riemann ne sont vérifiées nulle part.

5. Les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas suffisantes non plus. L'exemple suivant montre que toutes les conditions sont nécessaires.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{C} par

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{y^3 - x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } z \neq 0, \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases} \quad (4.2.4)$$

5.1 On constatera d'abord que la fonction est continue sur \mathbb{C} . Pour $z \neq 0$ c'est facile à vérifier. En 0, en utilisant les inégalités :

$$|x^3 \pm y^3| \leq |x|^3 + |y|^3 \leq 2|z|^3,$$

on obtient $|f(z)| \leq 2|z|$, ce qui implique la continuité en 0.

5.2 On peut voir facilement que la fonction f est \mathbb{R} -différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$, c'est à dire sur $\mathbb{C} \setminus 0$ (les parties réelles et imaginaires u et v sont des fractions rationnelles à dénominateur non nul). Vérifions les conditions de Cauchy-Riemann. On calcule simplement :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2},$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

On voit grossièrement que les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas satisfaites arbitrairement. Vérifions s'il y a des points où elles le seraient. En posant

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

on obtient

$$x^2 - y^2 = 2xy, \quad x^2 - y^2 = -2xy,$$

ce qui n'est pas possible si $(x, y) \neq (0, 0)$. Ainsi les conditions de Cauchy-Riemann ne sont pas vérifiées dans $\mathbb{C} \setminus 0$ et f n'est pas holomorphe dans ce domaine.

5.3 Reste à vérifier ce qui se passe en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ (ou en $0 \in \mathbb{C}$).

On a

$$u(x, 0) = x, \quad u(0, y) = y; \quad v(x, 0) = -x, \quad v(0, y) = y.$$

Cela permet de calculer les dérivées partielles en $(0, 0)$. On obtient facilement

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0)$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 1 = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0).$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont donc bien vérifiées.

Par contre les fonctions u et v (et donc la fonction f) ne sont pas \mathbb{R} -différentiables en $(0, 0)$. Vérifions le pour u .

Les dérivées partielles de u en $(0, 0)$ existent, elles ont été calculées :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = 1.$$

On a alors

$$u(x, y) - u(0, 0) - \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0)(x - 0) - \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0)(y - 0) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - x - y = \epsilon(x, y).$$

Le reste $\epsilon(x, y)$ est donc

$$\epsilon(x, y) = \frac{x^3 + y^3 - (x + y)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = -\frac{xy(x + y)}{x^2 + y^2}.$$

On peut vérifier maintenant que

$$\left| \frac{\epsilon(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|xy(x + y)|}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette dernière expression n'a pas de limite quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. On peut le vérifier en calculant les limites partielles pour $x = y$ et $x = -y$. Par conséquent il n'y a pas de \mathbb{R} -différentiabilité en $(0, 0)$ (cf. définition de la différentiabilité réelle au paragraphe 1.2.1, page 4).

4.2.2 Conditions de Cauchy-Riemann et conséquences

Il faut vérifier les conditions de Cauchy-Riemann et la \mathbb{R} -différentiabilité. La dérivée peut être calculée d'une manière formelle en utilisant les règles élémentaires. On peut aussi montrer qu'une fonction n'est pas dérivable à l'aide de calculs formels simples. Nous les justifions ici. Il y a les conditions de Cauchy-Riemann vues plus haut (4.2.3) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

D'autres conditions en découlent ou sont équivalentes.

Pour les trouver, nous allons exprimer $f(z)$ en fonction de \bar{z} . En effet, la fonction $f(z) = f(x + iy)$ peut aussi être considérée comme une fonction de z et de $\bar{z} = x - iy$ car $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$. Nous noterons la fonction, par abus, $f(x + iy) = f(x, y) = f(z, \bar{z})$. Nous ferons cet abus de notation tant qu'il n'y aura pas de confusion.

Notons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

On a alors

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

De même

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

On obtient alors les deux formules qu'il faut retenir

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (4.2.5)$$

Et nous obtenons alors une autre formulation des conditions de Cauchy-Riemann.

Théorème 4.3 *Les conditions de Cauchy-Riemann du théorème 4.2 sont équivalentes à la condition*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.2.6)$$

Et comme conséquence, si f est dérivable alors

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

PREUVE. L'expression (4.2.6) se vérifie par simple calcul. Supposons maintenant que f est dérivable, alors la condition (4.2.6) donne

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

car le dernier terme est nul. Il en découle $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}$. ■

Interprétation géométrique des conditions de Cauchy-Riemann. Si on considère dans le plan xOy les courbes représentant les fonctions

$$u(x, y) = C_1, \quad v(x, y) = C_2,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes, alors les conditions de Cauchy-Riemann signifient que les courbes sont orthogonales.

En coordonnées polaires :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}, \quad (4.2.7)$$

ce qui peut se vérifier par un calcul simple direct ou en utilisant l'expression de la jacobienne de passage entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Comme pour les coordonnées cartésiennes, on peut obtenir une expression plus compacte :

$$\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0.$$

Cette formule s'obtient facilement à partir de (4.2.7).

Par ailleurs les conditions de Cauchy-Riemann impliquent que pour une fonction holomorphe la partie réelle et la partie imaginaire sont étroitement liées. On peut calculer l'une à partir de l'autre à une constante près.

Théorème 4.4 *Soit $f = u + iv$ une fonction holomorphe sur un domaine Ω simplement connexe (cf. chapitre 1). Alors les fonctions u et v sont des fonctions harmoniques, c'est à dire :*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

où Δ est le laplacien (cf. chapitre 1). Les formes différentielles

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad \psi = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

sont exactes (cf. la remarque 2.5, page 21). Il en découle que les intégrales

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

ne dépendent pas du chemin entre les points $A = (x_0, y_0)$ et $B = (x, y)$ dans Ω .

PREUVE. Nous admettrons que les fonctions u et v sont de classe \mathbb{C}^2 . Ceci découle en réalité du fait que f est holomorphe comme on le verra plus loin (cf. le théorème 5.8, page 52). Les conditions de Cauchy-Riemann et l'égalité des dérivées partielles mixtes donne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Il en est de même pour la fonction v . D'où $\Delta u = 0$ et $\Delta v = 0$. Par ailleurs si $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ et $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, alors

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

à cause de l'égalité des dérivées partielles mixtes. Il en est de même si on remplace u par v . Les formes différentielles φ, ψ sont donc exactes. Alors, d'après le théorème 2.4, les intégrales curvilignes ne dépendent pas du chemin entre les points $A = (x_0, y_0)$ et $B = (x, y)$ dans Ω . ■

Ce résultat permet de calculer une fonction u connaissant la fonction v si $f = u + iv$ est holomorphe sur Ω . En effet

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + C = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C,$$

où C est une constante qu'il faut déterminer par d'autres moyens. Comme l'intégrale ne dépend pas du chemin, pour calculer

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx$$

on intègre par rapport à x en supposant y constant. Pour calculer

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial x} dy,$$

on intègre par rapport à y en supposant x constant.

4.2.3 Exemples

1. Revenons à l'exemple de la fonction $f(z) = \bar{z}$. On a bien

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 1 \neq 0.$$

2. Soit $f(z) = |z|^2$. En quels points est elle holomorphe ?

On a $f(z) = z\bar{z}$. Par conséquent $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = z$. Elle n'est pas \mathbb{C} -différentiable pour $z \neq 0$.

Considérons le cas $z_0 = 0$. Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées. De plus $f(z) = f(x+iy) = x^2+y^2$. Elle est \mathbb{R}^2 -différentiable ($u(x, y) = x^2+y^2$ l'est et $v = 0$ aussi). Alors $f(z) = |z|^2$ est \mathbb{C} -différentiable uniquement en 0.

Question : qu'en est il des fonctions $|z|$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$?

3. Trouver la fonction holomorphe $f = u + iv$ sachant que $v(x, y) = xy$.

On a

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = x.$$

Alors

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} x dx - y dy = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C.$$

La fonction f est donc

$$f(x + iy) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C + ixy.$$

Pour avoir son expression en z il suffit de remplacer x et y par $\frac{z+\bar{z}}{2}$ et $\frac{z-\bar{z}}{2i}$ et on obtient $f(z) = \frac{z^2}{2} + C$ et la constante est réelle.

4.3 Les fonctions élémentaires

Nous examinerons ici les fonctions $e^z = \exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ assez rapidement.

4.3.1 L'exponentielle

On peut définir la fonction exponentielle de plusieurs manières :

1. $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$
2. $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$
3. $\exp(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$.

Les trois définitions sont équivalentes, bien que la démonstration ne soit pas facile. Nous utiliserons surtout les deux dernières, plus simples à manipuler.

Si $\exp(z)$ est donné par la série (formule 2), on sait (ou on peut vérifier) que le rayon de convergence est $R = \infty$. La fonction sera alors \mathbb{C} -différentiables pour tout z . Sa dérivée est (cf. formule générale au paragraphe 4.2.1)

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = e^z.$$

Retrouvons cette même formule en utilisant l'expression de l'exponentielle donnée en 3.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x (\cos y + i \sin y),$$

et on obtient le même résultat : $f'(z) = \exp(z)$.

Les propriétés habituelles de l'exponentielle sont conservées :

1. $\exp(z_1 + z_2) = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;
2. $\exp(z) \neq 0$;
3. $\forall \zeta \neq 0, \exists z$ tel que $e^z = \zeta$.

Il y a une nouvelle propriété importante, **la périodicité** :

$$\exp(z + 2i\pi) = \exp(z).$$

Cette propriété fait que le logarithme, comme fonction réciproque, n'est plus univoque. Nous abordons cette question plus loin.

4.3.2 Les fonctions trigonométriques

Elles sont définies à l'aide de l'exponentielle et sont des extensions des fonctions trigonométriques habituelles.

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Les fonctions sont 2π -périodiques, holomorphes sur \mathbb{C} , **non bornées** et

$$\cos'(z) = -\sin z, \quad \sin' z = \cos z.$$

De même, on peut définir les fonctions cosinus et sinus hyperboliques par

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

dont les propriétés découlent de celles de l'exponentielle. On obtient facilement :

$$\cosh'(z) = \sinh(z), \quad \sinh'(z) = \cosh(z).$$

4.3.3 Logarithme et puissances non entières

On peut essayer de définir le logarithme naturel d'un nombre complexe et donc d'une fonction complexe comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Comme cette fonction est périodique (donc non injective), le logarithme ne serait pas bien défini ou défini à une période près.

Ainsi pour $z = x + iy = re^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$, on peut définir le logarithme complexe

$$\operatorname{Ln} z = \ln r + i\theta + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ce n'est pas une fonction au sens habituel mais une fonction **multivoque**. On voit bien que si $\zeta = \operatorname{Ln} z$ (plus dans le sens d'une inclusion qu'une égalité) alors $e^\zeta = z$. Cette définition implique que $\operatorname{Ln} e^z$ n'est pas nécessairement égal à z et que $\operatorname{Ln}(z_1 z_2)$ peut être différent de $\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.

Cela nous amène à définir la **détermination principale** du logarithme : c'est la fonction

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad \theta \in]-\pi, \pi[.$$

En fait c'est la *branche* de $\operatorname{Ln} z$ qui vérifie la relation $\ln 1 = 0$. On peut montrer qu'elle est unique, que c'est une fonction continue, holomorphe, etc. Elle est obtenue en prenant une fonction réciproque de e^z sur $\mathbb{C} \setminus]0, -\infty[$, autrement dit \mathbb{C} avec une **coupure**. En choisissant une autre coupure, on obtient une autre **détermination** ou **branche** du logarithme complexe.

Pour la fonction racine nous sommes en face du même problème. En effet, considérons l'expression $z^{\frac{1}{2}}$. On a alors

$$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Ln} z} = e^{\frac{1}{2}(\ln r + i\theta + 2k\pi i)} = e^{\frac{\ln r}{2} + i\frac{\theta}{2} + k\pi i},$$

ce qui donne pour $z^{\frac{1}{2}}$ deux valeurs en général. C'est donc une fonction multivoque.

D'une manière plus générale

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} = e^{\alpha(\ln r + i\theta + 2k\pi i)}.$$

Si α est un nombre entier la fonction est univoque, sinon elle est multivoque et a plusieurs branches. On peut, comme pour le logarithme, définir une **détermination principale** par une **coupure** appropriée.

Chapitre 5

Formules de Cauchy et méthode des résidus

5.1 Intégrale curviligne complexe

Il n'y a rien de vraiment nouveau. L'intégrale curviligne complexe se définit d'une manière analogue au cas réel et constitue une extension de la notion d'intégrale curviligne de 2^e espèce. Soit Γ une courbe rectifiable dans \mathbb{C} (comme dans \mathbb{R}^2). On a

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\max \Delta z_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n f(\zeta_i) \Delta z_i, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1},$$

si cette limite existe. L'ensemble de points $\{z_i, i = 0, \dots, n\}$ est une partition de Γ et les points ζ_i sont compris entre z_{i-1} et z_i . **Le sens de parcours de la courbe Γ est important.**

L'existence de l'intégrale est garantie si la courbe est rectifiable et la fonction continue. Les propriétés élémentaires de l'intégrale sont vérifiées : linéarité, additivité par rapport au chemin d'intégration, etc. En particulier nous avons le lemme de majoration suivant.

Lemme 5.1 *Soit Γ une courbe rectifiable et $f(z)$ une fonction continue sur Γ . Alors*

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| \leq L(\Gamma) \cdot \max_{z \in \Gamma} |f(z)|,$$

où $L(\Gamma)$ est la longueur de la courbe Γ et $|dz| = dl$ sur Γ (cf. l'intégrale d'une fonction scalaire dans le chapitre 2).

On peut établir facilement le résultat suivant.

Théorème 5.2 *Si la courbe Γ est de classe C^1 et donnée par une paramétrisation $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, alors*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

où $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$. Si la courbe Γ est donnée par $y = y(x)$ ou $x = x(y)$, la formule est adaptée à cette forme de paramétrisation.

PREUVE. Comme pour le théorème 2.2, la démonstration est basée sur le fait que

$$dz = dx + i dy = [x'(t) + iy'(t)] dt.$$

La démonstration formelle est un peu plus élaborée, mais cela revient à cet argument. ■

L'intégrale curviligne complexe peut s'exprimer à l'aide d'intégrales curvilignes de fonctions vectorielles (intégrales de 2^e espèce).

En effet, pour $f = u + iv$, les sommes qui définissent l'intégrale peuvent s'écrire

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\zeta_i) \Delta z_i = \sum_{i=1}^n (u(\xi_i, \eta_i) + iv(\xi_i, \eta_i)) (\Delta x_i + i\Delta y_i).$$

En regroupant les termes réels et imaginaires on obtient

$$S_n = \sum_{i=1}^n u(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i - v(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i + i \sum_{i=1}^n u(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i + v(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

En passant à la limite, on obtient

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} u dy + v dx, \quad (5.1.1)$$

et les intégrales sont les intégrales de deux formes différentielles réelles comme nous les avons vues dans le Chapitre 2. On peut ainsi utiliser les résultats sur les intégrales curvilignes réelles, en particulier la formule de Green-Riemann.

5.1.1 Exemples

Calculer $\oint_{C(0,r)} f(z) dz$, où $C(0, r)$ est le cercle de centre 0 et de rayon r dans les cas suivants :

1. $f(z) = \bar{z}$, 2. $f(z) = z^2$, 3. $f(z) = 1/z$.

1. On a $f(z) = \bar{z} = re^{-i\theta}$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Alors

$$\oint_{C(0,r)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} re^{-i\theta} d(re^{i\theta}) = r^2 i \int_0^{2\pi} d\theta = 2r^2 i\pi.$$

2. De la même manière pour $f(z) = z^2$, on a

$$\oint_{C(0,r)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} r^2 e^{2i\theta} d(re^{i\theta}) = r^3 \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta = 0.$$

Nous verrons plus loin que ce résultat est générique dans un certain sens car z^2 est holomorphe dans le plan ce qui impliquera que cette intégrale est nulle.

3. Pour $f(z) = 1/z$, la même démarche est possible :

$$\oint_{C(0,r)} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-i\theta} r i e^{i\theta} d\theta = 2\pi i.$$

5.2 Les théorèmes de Cauchy

Dans la théorie des fonctions complexes, les résultats suivants sont fondamentaux.

5.2.1 Le théorème de Cauchy-Goursat

Établi d'abord par Cauchy avec l'hypothèse que $f'(z)$ est continue, il a été précisé par Goursat^a sans cette hypothèse. A posteriori, la continuité de la dérivée est vérifiée, mais découle du théorème.

Théorème 5.3 (Cauchy-Goursat) *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine borné Ω dont la frontière $\partial\Omega$ est régulière par morceaux. Alors*

$$\oint_{\partial\Omega} f(z) dz = 0.$$

PREUVE. Nous donnons la démonstration en supposant que $f'(z)$ est continue. Le résultat est vrai sans cette hypothèse, mais la démonstration est plus compliquée bien que très accessible. Nous en donnerons un schéma plus bas.

Rappelons l'expression 5.1.1 sur le contour $\partial\Omega$

$$\int_{\partial\Omega} f(z) dz = \int_{\partial\Omega} u dx - v dy + i \int_{\partial\Omega} u dy + v dx,$$

Si $f'(z)$ est continue, alors les fonctions u et v sont de classe $C^1(\Omega)$. On applique la formule de Green-Riemann (cf. le théorème 2.3) aux deux intégrales réelles. On a alors

$$\oint_{\partial\Omega} f(z) dz = \iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann impliquent que

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

ce qui donne $\oint_{\partial\Omega} f(z) dz = 0$. ■

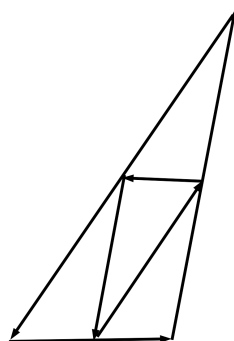


FIGURE 5.1 – Partition du triangle

PREUVE plus complète, n'utilisant pas la continuité de la dérivée. C'est le théorème de Goursat.

On montre d'abord que l'intégrale d'une fonction affine $\alpha z + \beta$ sur un rectangle est nulle. On en déduit que sur un triangle on a la même chose.

On établit ensuite cette propriété pour une fonction holomorphe sur un triangle de la manière suivante. On considère un triangle T . Supposons que

$$\oint_T f(z) dz = \mu.$$

a. Édouard Goursat (1858-1936), mathématicien français.

À partir des milieux des côtés du triangle $T_0 = T$ on trace des parallèles aux autres côtés. On obtient ainsi 4 triangles semblables au premier et qui le recouvrent (cf Figure 5.1). Parmi ces triangles, il en existe un, noté T_1 , tel que

$$\oint_{T_1} f(z) dz \geq \frac{\mu}{4}.$$

On continue ce processus et construit ainsi, à chaque étape n , 4 triangles dont l'un au moins, T_n , est tel que

$$\oint_{T_n} f(z) dz \geq \frac{\mu}{4^n} \quad (5.2.1)$$

Si p est le périmètre de T , alors $p_n = 2^{-n}p$ est le périmètre de T_n . À partir de ça, de la dérivabilité de f en tout point de Ω et du fait que pour une fonction affine l'intégrale sur un triangle est nulle, on obtient

$$\oint_{T_n} f(z) dz \leq p_n \cdot o(2^{-n}) = o\left(\frac{1}{4^n}\right). \quad (5.2.2)$$

Les deux inégalités (5.2.2)-(5.2.2) ne peuvent être vérifiées pour tout n que si $\mu = 0$.

Le résultat est vrai pour un triangle, donc pour tout polygone. En passant à la limite quand le polygone converge vers la frontière régulière par morceaux, on obtient le résultat.

Corollaire 5.4 *Dans les conditions du théorème 5.3, pour deux points z_0 et z dans l'ensemble Ω , l'intégrale*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

ne dépend pas du chemin entre z_0 et z et la fonction définie $F(z)$ est une primitive de $f(z)$: $F'(z) = f(z)$.

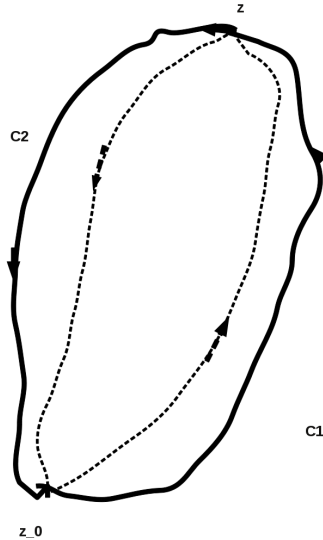


FIGURE 5.2 – Intégrale ne dépendant pas du chemin

PREUVE. Soit C un contour positif dans Ω tel que $z, z_0 \in C$. Soit C_1 et C_2 les deux parties de C telles que z_0 est le point initial et z le point final de C_1 ; z est le point initial et z_0 le point final de C_2 (cf. Figure prim2). On a alors

$$\oint_C f(\zeta) d\zeta = \int_{C_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{C_2} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

Ce qui implique :

$$\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_{C_1} f(\zeta) d\zeta = - \int_{C_2} f(\zeta) d\zeta = \int_{C_2^-} f(\zeta) d\zeta,$$

où C_2^- est le chemin C_2 pris en sens inverse. En posant

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$

on peut démontrer que $F'(z) = f(z)$. De plus si $F_1(z)$ est une primitive quelconque de $f(z)$ on a alors

$$\int_a^b f(z) dz = F_1(b) - F_1(a),$$

les points a et b étant dans le bon domaine. ■

5.2.2 La formule de Cauchy

On dit parfois la 2^e formule de Cauchy, la première formule étant celle du théorème 5.3.

Théorème 5.5 *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine Ω , A un compact de Ω et ∂A sa frontière. Soit $z_0 \in A$. Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (5.2.3)$$

autrement dit, la valeur d'une fonction holomorphe en un point dépend de ses valeurs sur tout contour autour de ce point.

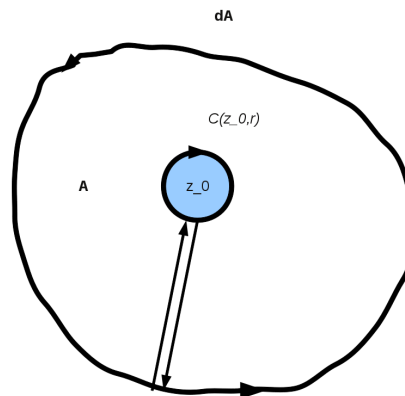


FIGURE 5.3 – Formule de Cauchy

PREUVE. On considère la fonction

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$$

sur le domaine Ω privé de l'intérieur du disque dont la frontière est le cercle de rayon r centré en z_0 (cf. Figure 5.3). Elle est holomorphe. Il en découle, d'après le théorème de Cauchy-Goursat, que

$$\oint_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Calculons la dernière intégrale. On a

$$\oint_{C(z_0, r)} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi i,$$

car cette intégrale se ramène à $\oint_{C(0, r)} \frac{dz}{z}$, calculée dans l'un des exemples au paragraphe 5.1.1. On peut écrire

$$\begin{aligned} \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= 2\pi i f(z_0) - 2\pi i f(z_0) + \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= 2\pi i f(z_0) - f(z_0) \oint_{C(z_0, r)} \frac{1}{z - z_0} dz + \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \\ &= 2\pi i f(z_0) + \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz. \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Comme $f(z)$ est dérivable au voisinage de z_0 , alors

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

est bornée dans ce voisinage (disque de rayon r , par exemple) par une constante M . Par conséquent

$$\left| \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right| \leq M \left| \oint_{C(z_0, r)} dz \right| = 2\pi r M \rightarrow 0, \quad \text{quand } r \rightarrow 0.$$

Ainsi pour tout $r > 0$, tel que $B(z_0, r) \subset A$, on a

$$\oint_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i + o(1),$$

où $o(1) \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$ et la première intégrale ne dépend pas de r , alors la relation (5.2.4) donne l'égalité désirée :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

■

Une application immédiate : le théorème de la moyenne.

Corollaire 5.6 (Théorème de la moyenne) *Si f est holomorphe sur un ouvert contenant la boule fermé de rayon R centrée en z_0 , alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta.$$

PREUVE. On applique la 2^e formule de Cauchy et on pose $z - z_0 = Re^{i\theta}$ dans l'intégrale

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}} d(z_0 + Re^{i\theta}).$$

D'où

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\theta}) i Re^{i\theta}}{Re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\theta}) d\theta$$

■

5.2.3 Exemples

1. Calculer l'intégrale

$$\oint_{C(0,5)} \frac{z^5}{(z-1)(z-2)} dz.$$

On applique directement la formule de Cauchy. Pour cela on décompose la fraction $\frac{z^5}{(z-1)(z-2)}$ en éléments simples :

$$\frac{z^5}{(z-1)(z-2)} = \frac{z^5}{(z-2)} - \frac{z^5}{(z-1)},$$

et par conséquent

$$\oint_{C(0,5)} \frac{z^5}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_{C(0,5)} \frac{z^5}{(z-2)} dz - \oint_{C(0,5)} \frac{z^5}{(z-1)} dz.$$

La formule de Cauchy nous donne alors

$$\oint_{C(0,5)} \frac{z^5}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i(2^5 - 1^5) = 62\pi i.$$

2. Soit à calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} z^{17} dz,$$

sur le chemin γ qui est une ligne brisée qui joint les points $z_0 = 0, z_1 = i, z_2 = 2+i, z_3 = 3+\frac{i}{2}, z_4 = 10$.

On remarquera alors que si on considère le contour fermé C , formé de la ligne brisée passant par les points :

$$z_0 = 0, \quad z_4 = 10, \quad z_3 = 3 + \frac{i}{2}, \quad z_2 = 2 + i, \quad z_1 = i, \quad z_0 = 0,$$

alors la fonction z^{17} est holomorphe sur un ouvert contenant ce contour et par conséquent, d'après la 1^{re} formule de Cauchy, on a

$$\int_C z^{17} dz = 0.$$

Par ailleurs, ce contour peut être écrit sous la forme

$$C = \gamma^- \cup [0, 10],$$

où γ^- est le chemin γ parcouru en sens inverse. Alors

$$-\int_{\gamma} z^{17} dz + \int_0^{10} x^{17} dx = 0.$$

D'où on obtient facilement le résultat :

$$\int_{\gamma} z^{17} dz = \frac{10^{18}}{18}.$$

5.3 Série de Laurent et analyticité

Les formules de Cauchy nous permettent d'obtenir le développement d'une fonction complexe, holomorphe dans un voisinage de z_0 , sauf peut être en ce point, en une série dite de Laurent ^b.

Théorème 5.7 Soit f une fonction holomorphe sur une couronne centrée en z_0

$$\mathcal{C}_{z_0} = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Alors f admet sur \mathcal{C}_{z_0} un développement en série

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Ce développement est unique et les coefficients a_n sont donnés par la formule

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad (5.3.1)$$

où r est un nombre quelconque : $R_1 < r < R_2$.

PREUVE. Pour faciliter la lecture, nous ferons la démonstration pour le cas $z_0 = 0$. Elle s'adapte facilement au cas général.

On considère le compact $A = \{z : r_1 < |z| < r_2\}$ où $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Soit z un point intérieur de ce compact : $r_1 < |z| < r_2$. On a alors d'après la 2^e formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, r_2) \cup C^-(0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

En réalité il faudrait ajouter les intégrales sur les segments de droites γ^+ et γ^- , mais leur somme est nulle. Par conséquent, en tenant compte du sens de parcours,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (5.3.2)$$

Nous allons maintenant développer la fonction $g(w) = \frac{1}{w - z}$ sur les cercles $C(0, r_1)$ et $C(0, r_2)$.

Quand w parcourt le cercle $C(0, r_1)$ on a $|w| < |z|$ donc $|\frac{w}{z}| < 1$ et

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{w}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}$$

b. Pierre Alphonse Laurent (1813-1854), mathématicien français.

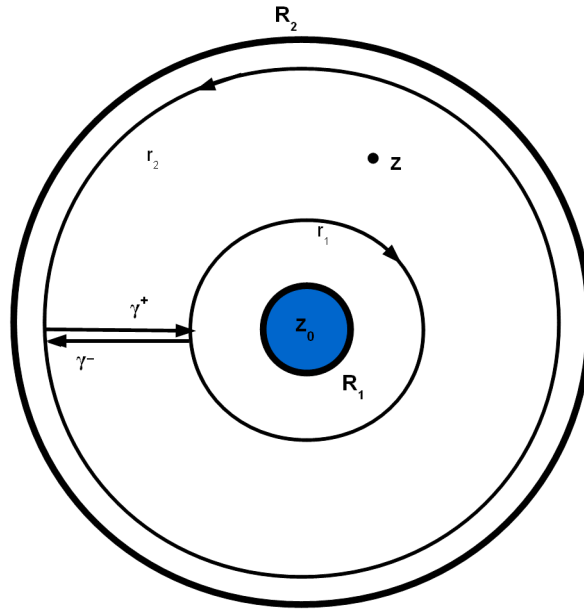


FIGURE 5.4 – Couronne pour la série de Laurent

Quand w parcourt le cercle $C(0, r_2)$ on a $|z| < |w|$ donc $|\frac{z}{w}| < 1$ et

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \cdot \frac{1}{\frac{z}{w} - 1} = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}}.$$

En remplaçant dans l'expression (5.3.2) on obtient

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, r_2)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, r_1)} f(w) \cdot w^n dw \cdot \frac{1}{z^{n+1}}.$$

En regroupant les puissances négatives et positives dans la même formule, on obtient la formule

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

car les intégrales sur $C(0, r)$, $C(0, r_1)$ ou $C(0, r_2)$ sont égales.

Pour passer au cas général d'une couronne centrée en z_0 et donc à la série de Laurent en z_0 , il suffit d'écrire

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0) - (z - z_0)}$$

et refaire les mêmes calculs. ■

Dans le même esprit on obtient le résultat fondamental suivant : une fonction holomorphe est analytique, et donc C^∞ , c'est à dire indéfiniment dérivable.

Théorème 5.8 *Une fonction holomorphe sur une boule ouverte $B(z_0, r)$ est analytique, c'est à dire développable en série entière (série de Taylor)^c sur cette boule. Elle est donc indéfiniment dérivable sur $B(z_0, r)$. On a alors*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

Si elle l'est au voisinage de tout point d'un ouvert Ω on dit qu'elle est analytique sur Ω et donc indéfiniment dérivable sur Ω .

PREUVE. La démonstration, basée sur la 2^e formule de Cauchy et le développement de la fonction $\frac{1}{w-z}$ en série de Taylor, est analogue à celle du théorème précédent.

On peut aussi utiliser directement la série de Laurent. Si on suppose que la fonction est holomorphe aussi en z_0 alors

$$\forall n < 0, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,r)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = 0.$$

■

Attention : une fonction C^∞ n'est pas nécessairement analytique. Exemple : $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$. Elle est C^∞ . Ses coefficients de Taylor en 0 sont tous nuls alors qu'elle n'est pas nulle.

5.4 Théorème des résidus

Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un point sauf en z_0 . On veut qualifier et caractériser ce point **isolé**. Cela permettra de calculer des intégrales en utilisant les outils développés à partir de cette analyse.

5.4.1 Points singuliers

Soit f analytique (holomorphe) au voisinage de z_0 , sauf en ce point. Alors z_0 est dit **point singulier isolé** de la fonction complexe. On peut distinguer 3 cas :

1. Le point singulier (ou la singularité) est dit(e) éliminable si $a_n = 0$ pour tout entier $n < 0$. C'est une situation analogue à celle où une fonction est prolongeable par continuité. Ici elle est prolongeable par **holomorphie**. Exemples :

$$\frac{\sin z}{z}, \quad \frac{e^z - 1}{z}, \quad \frac{\cos z - 1}{z^2}.$$

2. Le point singulier z_0 est appelé **pôle** si $a_n = 0$ pour tout $n < -n_0 < 0$. L'entier n_0 est l'ordre du pôle. Le pôle est dit **simple** si $n_0 = 1$. La fonction f s'écrit au voisinage de z_0 sous la forme

$$f(z) = \frac{a_{-n_0}}{(z - z_0)^{n_0}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} + f_1(z),$$

où f_1 est holomorphe en z_0 . Exemples : fonctions rationnelles et d'une manière plus générale le quotient de fonctions holomorphes qu'on appelle fonction méromorphe.

c. Brook Taylor (1685-1731) est un mathématicien et homme de sciences anglais.

3. Le point singulier est dit essentiel (**singularité essentielle**) s'il existe une infinité d'entiers n négatifs tels que $a_n \neq 0$. Exemple : $e^{\frac{1}{z}}$.

Nous nous limitons ici aux points singuliers isolés. Il existe aussi des points singuliers **non-isolés**. C'est le cas du point $z_0 = 0$ pour la fonction

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$$

qui est la limite des points singuliers isolés $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et donc qui n'est pas lui-même isolé.

5.4.2 Méthode des résidus

Pour une fonction f holomorphe au voisinage de z_0 , on appelle résidu de f en z_0 le coefficient a_{-1} de sa série de Laurent. Il est noté $\text{res}(f, z_0)$:

$$\text{res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(z_0, r)} f(z) dz,$$

où r est tel que le seul point singulier dans $B(z_0, r)$ pour la fonction f est z_0 .

Le résultat suivant justifie en grande partie le développement de ce paragraphe.

Théorème 5.9 (Théorème des résidus) *Soit f une fonction holomorphe sur un domaine contenant un compact A à frontière régulière ∂A , sauf en un nombre fini de points singuliers z_1, \dots, z_n de A . Alors*

$$\oint_{\partial A} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}(f, z_k).$$

Il suffit donc de savoir calculer les résidus pour obtenir l'intégrale.

PREUVE. La démonstration utilise la même démarche que celle de la 2^e formule de Cauchy.

On considère le compact A privé de boules centrées en z_k :

$$A_r = A \setminus \bigcup_{k=1}^n B(z_k, r),$$

avec r suffisamment petit. f est holomorphe sur A_r et on a donc

$$0 = \oint_{\partial A_r} f(z) dz = \oint_{\partial A} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \oint_{C(z_k, r)} f(z) dz.$$

Pour r petit, on peut remplacer f par sa série de Laurent au voisinage du point z_k . On a alors

$$\oint_{C(z_k, r)} f(z) dz = \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} a_i \oint_{C(z_k, r)} (z - z_k)^i dz.$$

On vérifie facilement que

$$\forall i \neq -1, \oint_{C(z_k, r)} (z - z_k)^i dz = 0, \quad \text{et} \quad \oint_{C(z_k, r)} \frac{dz}{z - z_k} = 2i\pi.$$

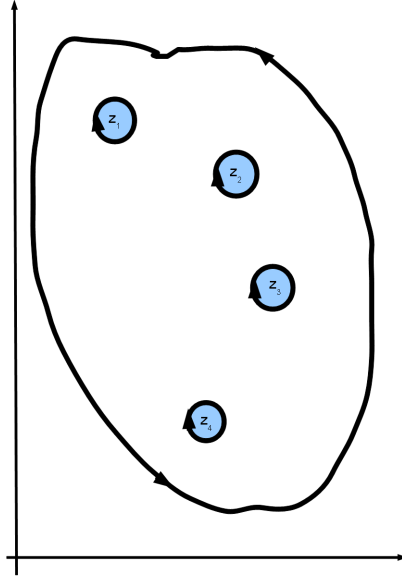


FIGURE 5.5 – Théorème des résidus

D'où le résultat

$$\oint_{\partial A} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C(z_k, r)} f(z) dz = \sum_{k=1}^n 2\pi i a_{-1}(z_k) = \sum_{k=1}^n 2\pi i \operatorname{res}(f, z_k).$$

■

Nous verrons plus loin comment calculer les résidus.

Si on doit calculer plusieurs résidus d'une fonction, il est parfois utile d'utiliser la notion de résidu à l'infini et le résultat lié à cette notion.

Soit f une fonction holomorphe sauf en un nombre fini de points isolés z_1, \dots, z_k . Soit R un réel suffisamment grand pour que f soit holomorphe en tout point extérieur au cercle $C(0, R)$. On appelle résidu à l'infini le scalaire

$$\operatorname{res}(f, \infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, R)} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-(0, R)} f(z) dz.$$

En fait, on fait comme si notre point singulier était à l'infini et on parcourt un cercle positif **par rapport au domaine contenant le point isolé : l'extérieur du cercle**. Si on fait un changement de variable en remplaçant z par $1/z$ on se ramène en 0. Il faut tenir compte du changement de variable sous le signe de l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0, 1/R)} \frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

C'est donc le résidu de $\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ en 0. On a donc

$$\operatorname{res}(f, \infty) = \operatorname{res}\left(\frac{-1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

L'intérêt de cette notion se justifie par le théorème suivant.

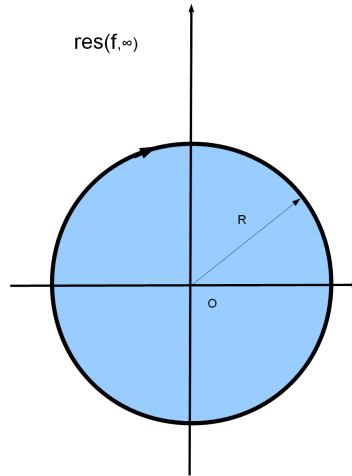


FIGURE 5.6 – Résidu à l'infini

Théorème 5.10 Soit f une fonction holomorphe sur un domaine contenant un compact régulier A , sauf en un nombre fini de points singuliers z_1, \dots, z_n de A . Alors

$$\operatorname{res}(f, \infty) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}(f, z_k) = 0.$$

On peut calculer une partie des résidus connaissant les autres.

PREUVE. Il suffit d'adapter la démonstration du théorème précédent. ■

5.4.3 Calcul des résidus

1. Pôle simple. La série de Laurent au voisinage de z_0 est

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

On a alors

$$\operatorname{res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

2. Pôle simple, quotient de fonctions holomorphes. Soit $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, où h et g sont holomorphes et z_0 est un zéro simple^d de g . Alors

$$\operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z)}{\frac{g(z)}{z - z_0}} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Cas particulier : fonction rationnelles $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où P et Q sont des polynômes.

d. C'est à dire $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$.

3. Pôle multiple. Soit $m \geq 2$ l'ordre du pôle. Dans ce cas la série de Laurent de f en z_0 s'écrit

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

On vérifie aisément que

$$\text{res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z - z_0)^m f(z) \Big|_{z=z_0}. \quad (5.4.1)$$

4. Singularité essentielle. Unique méthode : écrire le développement en série de Laurent.

5.4.4 Exemples

1. Trouver les points singuliers et les résidus correspondant pour la fonction

$$f(z) = \frac{z}{(2z+1)(5-z)}.$$

Il y a deux pôles : $z_1 = -\frac{1}{2}$ et $z_2 = 5$. Calculer les résidus selon les deux méthodes indiquées plus haut.

Pour $z_1 = -\frac{1}{2}$ on a

$$\text{res}(f, -\frac{1}{2}) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} (z + \frac{1}{2}) f(z) = \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{z}{2(5-z)} = \frac{-\frac{1}{2}}{2(5 + \frac{1}{2})} = -\frac{1}{22}.$$

On remarquera qu'on a multiplié la fonction par $(z + \frac{1}{2})$, comme l'exige la formule et non pas par $(2z+1)$.

Pour $z = 5$ nous utiliserons la méthode du quotient : $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, avec $h(z) = z$ et $g(z) = (2z+1)(5-z)$. On a $g'(z) = 2(5-z) - 2z - 1 = -4z + 9$

$$\text{res}(f, 5) = \frac{z}{-4z+9} \Big|_{z=5} = -\frac{5}{11}$$

2. Calculer le résidu de $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}$. Ici $z_0 = 2$ est un pôle d'ordre 2. La fonction est déjà sous la forme de sa série de Laurent. On a $\text{res}(f, 2) = 0$.

3. Calculer le résidu de $f(z) = \frac{z}{(z-3)^2}$. Le point $z_0 = 3$ est un pôle d'ordre $m = 2$. On peut utiliser la formule 5.4.1 qui donne le résultat sans difficulté

$$\text{res}(f, 3) = \frac{d}{dz} (z-3)^2 f(z) \Big|_{z=3} = 1.$$

Il est parfois facile de construire la série de Laurent. Dans le cas présent on a

$$f(z) = \frac{z}{(z-3)^2} = \frac{z-3+3}{(z-3)^2} = \frac{1}{(z-3)} + \frac{3}{(z-3)^2}.$$

Et le résidu est bien $a_{-1} = 1$.

4. Trouver les singularités de $f(z) = z^3 \exp(\frac{1}{z})$ et calculer les résidus, y compris le résidu à l'infini. Ici $z_0 = 0$ est une singularité essentielle. C'est la seule dans \mathbb{C} . On sait que

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots, u \in \mathbb{C}.$$

Alors

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \exp\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} \cdots\right) \\ &= z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!z} + \frac{1}{5!z^2} + \cdots \end{aligned}$$

On a donc $\text{res}(f, 0) = \frac{1}{4!}$. Par conséquent le résidu à l'infini est

$$\text{res}(f, \infty) = -\frac{1}{4!}.$$

Vérifions le par un calcul direct. Il faut calculer le résidu en 0 de $-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)$. Dans notre cas

$$-\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^5}e^z = -\frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^4} - \frac{1}{2!z^3} - \frac{1}{3!z^2} - \frac{1}{4!z} - \frac{1}{5!} - \cdots.$$

On retrouve bien $\text{res}(f, \infty) = -\frac{1}{4!}$.

Chapitre 6

Applications

Nous donnons ici des applications élémentaires des fonctions holomorphes et des formules de Cauchy.

6.1 Calcul d'intégrales

6.1.1 Lemme de Jordan

En fait il y a plusieurs lemmes qui sont regroupés sous le terme de *lemme de Jordan*^a. On peut donner un résultat assez général d'où découlent différentes formulations, mais nous donnons directement plusieurs formulations.

Lemme 6.1 *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe sur un domaine contenant le demi-plan supérieur $\{z = x + iy : y \geq 0\}$, sauf peut être en un nombre fini de points, et soit*

$$C_R = \{z = Re^{i\theta}, R > 0, \theta \in [0, \pi]\} \quad C_r = \{z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in [0, \pi]\}$$

1. Si $|zf(z)| \rightarrow 0$ uniformément quand $|z| \rightarrow \infty$, alors

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

2. Si $|zf(z)| \rightarrow 0$ uniformément quand $|z| \rightarrow 0$, alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = 0.$$

3. Si $|f(z)| \rightarrow 0$ uniformément quand $|z| \rightarrow \infty$, alors pour tout $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) \exp(iaz) dz = 0.$$

Si $a < 0$, alors le dernier résultat vaut pour le demi-cercle inférieur.

PREUVE. Pour les premières affirmations, on applique la démarche du théorème de la moyenne (cf. le corollaire 5.6).

Nous développons la preuve de la dernière affirmation.

a. Marie Ennemond Camille Jordan est un mathématicien français connu pour ces travaux en algèbre et son *Cours d'Analyse*.

Supposons que

$$M_R := \max_{\theta \in [0, \pi]} |f(Re^{i\theta})| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty.$$

On a par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) \, dz &= \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{iaR(\cos \theta + i \sin \theta)} i Re^{i\theta} \, d\theta \\ &= R \int_0^\pi f(Re^{i\theta}) e^{aR(i \cos \theta - \sin \theta)} i e^{i\theta} \, d\theta. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) \exp(iaz) \, dz \right| &\leq R \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{aR(i \cos \theta - \sin \theta)} i e^{i\theta} \, d\theta \\ &\leq R \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{-aR \sin \theta} \, d\theta \\ &\leq R \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(Re^{i\theta})| e^{-aR \sin \theta} \, d\theta + R \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |f(Re^{i\theta})| e^{-aR \sin \theta} \, d\theta. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'inégalité

$$\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

et après un changement de variable $\theta \rightarrow \pi - \theta$ dans la deuxième intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) \exp(iaz) \, dz \right| &\leq 2RM_R \int_0^{\pi/2} e^{-2aR\theta/\pi} \, d\theta \\ &= \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR}) M_R \\ &\leq \frac{\pi}{a} M_R. \end{aligned}$$

Et le résultat en découle. ■

6.1.2 Intégrales du type $\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \, dt$

La fonction $F(\xi, \eta)$ est supposée rationnelle en ξ et η . On pose $z = e^{it}$ et on a

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \quad dz = ie^{it} dt = iz \, dt.$$

On suppose que la fonction obtenue

$$f(z) = F \left(\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)$$

n'a pas de pôle sur le cercle unité. On calcule alors

$$\int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \, dt = \oint_{C(0,1)} \frac{f(z)}{iz} \, dz.$$

Pour calculer cette dernière intégrale il faut trouver les résidus des pôles de $f(z)$ situés à l'intérieur du disque unité.

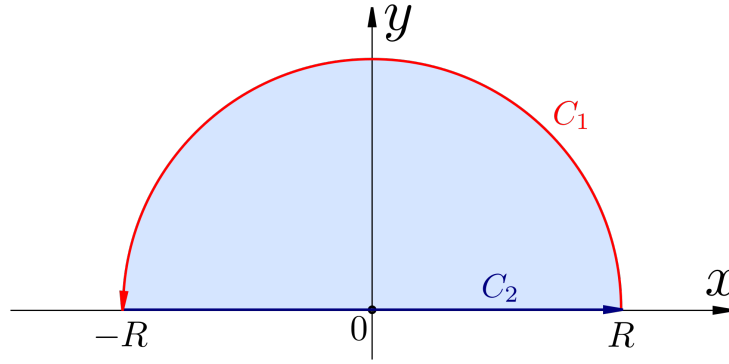


FIGURE 6.1 – Lemme de Jordan et calcul d'intégrale

6.1.3 Intégrales du type $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$

On suppose que l'intégrale en question converge. C'est vrai si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^\alpha \cdot |F(x)| = 0, \quad \alpha > 1.$$

On suppose également que $F(z)$ est méromorphe^b.

On calcule l'intégrale complexe sur le contour Γ formé par le demi-cercle C_1 centré en 0, de rayon R , y compris son diamètre $C_2 = [-R, R]$. L'idée étant que

$$\oint_{\Gamma} F(z) dz = \int_{C_1(R)} F(z) dz + \int_{C_2(R)} F(z) dz = \int_{C_1} F(z) dz + \int_{-R}^R F(x) dx.$$

Par des arguments du type du lemme de Jordan, on montre que

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_1(R)} F(z) dz = 0,$$

ce qui implique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = \oint_{\Gamma} F(z) dz.$$

la dernière intégrale se calcule en utilisant le théorème des résidus ou tout autre méthode de calcul de l'intégrale complexe.

6.1.4 Intégrales du type $\int_0^{\infty} x^{-\alpha} F(x) dx$

Dans ce cas $F(z)$ est une fonction méromorphe sans pôles réels sur \mathbb{R}^+ , α est un réel $0 < \alpha < 1$. L'intégrale est supposée convergente. Par exemple, elle est telle qu'à l'infini

$$|F(x)| = O\left(\frac{1}{x^\beta}\right), \quad \beta \geq 1.$$

Ici, en introduisant la fonction complexe z^α , $0 < \alpha < 1$ on a une fonction multivoque et il faut donc choisir une détermination ou une branche. De plus 0 est un point singulier pour la fonction $F(z)/z^\alpha$.

Pour le calcul on utilisera un contour γ particulier, cf. la figure 6.2. On a alors

^b. Méromorphe : holomorphe sur \mathbb{C} à l'exception d'un nombre fini de pôles ou quotient de deux fonctions entières, c'est à dire holomorphes sur \mathbb{C} .

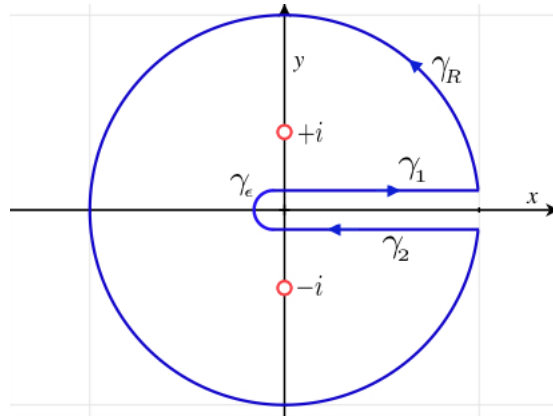


FIGURE 6.2 – Contour pour détermination de branche

$$\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z^{\alpha}} dz = \int_{\gamma_{\epsilon}} + \int_{\gamma_R} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}.$$

On établira alors que les deux premières intégrales tendent vers 0 :

$$\int_{\gamma_{\epsilon}} + \int_{\gamma_R} \rightarrow 0, \quad \text{quand } R \rightarrow \infty \text{ et } \epsilon \rightarrow 0.$$

L'intégrale \int_{γ_1} sera

$$\int_{\gamma_1} \frac{F(z)}{z^{\alpha}} dz = \int_{\epsilon}^R \frac{F(x)}{x^{\alpha}} dx.$$

Dans l'intégrale \int_{γ_2} la variable z aura un argument égal à 2π . Ainsi, si on utilise la détermination principale du logarithme, alors

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \text{Ln} z} = e^{\alpha \ln r + 2\alpha\pi i}.$$

Par conséquent

$$\int_{\gamma_2} \frac{F(z)}{z^{\alpha}} dz = - \int_{\epsilon}^R e^{-2\alpha\pi i} \frac{F(x)}{x^{\alpha}} dx.$$

Il s'ensuit alors que

$$\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z^{\alpha}} dz = (1 - e^{-2\alpha\pi i}) \int_{\epsilon}^R \frac{F(x)}{x^{\alpha}} dx + O(\epsilon, \frac{1}{R}),$$

où $O(\epsilon, \frac{1}{R}) \rightarrow 0$ quand $\epsilon \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$. Il suffit donc de calculer

$$\oint_{\gamma} \frac{F(z)}{z^{\alpha}} dz$$

pour R assez grand et ϵ petit, de telle manière que le contour γ englobe tous les points singuliers de $F(z)$.

6.1.5 Exemples

1. Calculer

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \cos t}, \quad a > 1.$$

En posant $z = e^{it}$ on a $\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ et $dt = \frac{dz}{iz}$. Ce qui donne

$$I = \int_{C(0,1)} \frac{dz}{iz \left(a + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right)} = -2i \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

La fonction $\frac{1}{z^2 + 2az + 1}$ sous le signe de l'intégrale a deux points singuliers

$$z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

dont un seul est à l'intérieur du cercle unité : $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$. Comme

$$\frac{1}{z^2 + 2az + 1} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

on a

$$\text{res}(f, z_1) = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{1}{2z_1 + 2a} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Ce qui donne

$$I = -2i \int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = -2i \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

2. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx.$$

On vérifie facilement que l'intégrale converge car

$$\left| \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} \right| \leq \frac{1}{x^2 + b^2} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{quand } x \rightarrow \infty.$$

Comme la fonction est paire, on peut écrire

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx$$

De plus

$$\frac{\cos ax}{x^2 + b^2} = \text{Re} \frac{e^{iax}}{x^2 + b^2}$$

On peut alors considérer l'intégrale

$$J = \int_\gamma \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} dz$$

où γ est le contour introduit au paragraphe 6.1.3 (cf. Figure 6.1). La fonction $F(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}$ sous le signe d'intégration a deux pôles $\pm ib$ dont un seul se trouve à l'intérieur du contour : $z_0 = ib$. On calcule facilement son résidu. On a alors

$$J = \int_\gamma \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} dz = 2i\pi \text{res} \left(\frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2}, ib \right) = 2i\pi \frac{e^{-ab}}{2ib} = \frac{\pi e^{-ab}}{b}$$

et c'est un nombre réel.

Par ailleurs

$$J = \int_{-R}^R F(z) dz + \int_{C_2} F(z) dz$$

et le lemme de Jordan permet de montrer que la deuxième intégrale tend vers 0 quand $R \rightarrow \infty$ car

$$F(z) = e^{iaz} f(z)$$

et $f(z)$ vérifie l'hypothèse du Lemme.

On a donc à la fin

$$I = \frac{1}{2}J = \frac{\pi e^{-ab}}{2b}$$

3. Soit à calculer l'intégrale

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

On utilisera la méthode développée au paragraphe 6.1.4.

La fonction $\frac{1}{z^\alpha(1+z)}$ a un seul pôle situé à l'intérieur du contour γ (cf. Figure 6.2), le point $z_0 = -1$. C'est un pôle simple. On a donc

$$\oint_\gamma \frac{1}{z^\alpha(1+z)} dz = 2\pi \operatorname{res}\left(\frac{1}{z^\alpha(1+z)}, -1\right) = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}}.$$

On peut montrer que

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{z^\alpha(1+z)} dz \rightarrow 0, \quad \int_{\gamma_R} \frac{1}{z^\alpha(1+z)} dz \rightarrow 0, \quad \text{quand } R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$$

soit par un calcul direct des intégrales curvilignes, soit en utilisant le lemme de Jordan. Il s'ensuit alors que

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha})I = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}}.$$

Il en découle

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx = I = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}} \times \frac{1}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$

6.2 Propriétés des fonctions analytiques

Nous avons vu un certain nombre de propriétés des fonctions holomorphes, en particulier l'analyticité. Nous continuons ici par d'autres résultats aussi importants.

6.2.1 Théorème de Liouville

Notons d'abord une conséquence directe des formules de Cauchy : les inégalités de Cauchy. Le théorème 5.8 donne l'expression de la série entière d'une fonction holomorphe

$$a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C(0,r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

Il en découle des inégalités pour les coefficients a_n :

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \quad M(r) = \sup\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.2.1)$$

La démonstration de ces formules est immédiate. Elles permettent d'établir le résultat suivant.

Théorème 6.2 (Liouville) *Soit f une fonction entière, c'est à dire une fonction holomorphe dans tout le plan complexe, et bornée sur \mathbb{C} . Alors f est constante.*

PREUVE. On utilise les inégalités de Cauchy. Comme f est bornée, on a $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$. On a donc

$$\forall R > 0, |a_n| \leq \frac{M(R)}{R^n} \leq \frac{M}{R^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Il s'ensuit que $a_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. D'où $f(z) = a_0$. ■

Comme une fonction entière est constante si elle bornée, et qu'elle ne peut avoir aucun autre point singulier que l'infini, le point à l'infini est un point singulier pour toute fonction entière non constante. C'est un pôle ou une singularité essentielle. Dans le premier cas (le pôle à l'infini), la fonction entière est un polynôme. Dans le second cas (singularité essentielle à l'infini), on dit que la fonction est **transcendante**. Exemple : e^z . Une conséquence bien connue : l'existence de racines d'un polynôme.

Théorème 6.3 (Théorème de D'Alembert) *Un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes admet une racine dans \mathbb{C} . Il en aura donc n si l'on tient compte de la multiplicité (cf. notion de multiplicité au paragraphe 6.2.3).*

PREUVE. Soit $P(z)$ le polynôme en question. Sans restreindre la généralité, on suppose que $a_n \neq 0$. C'est une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{P(z)}$. Si P n'a pas de zéro dans \mathbb{C} , alors f est une fonction entière sur \mathbb{C} . On vérifie facilement que

$$|P(z)| \sim |a_n||z|^n \quad \text{quand} \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Donc $f(z)$ est bornée dans \mathbb{C} , car $|f(z)| \rightarrow 0$, $|z| \rightarrow \infty$. Le théorème de Liouville implique que P est constant, ce qui n'est pas possible puisque $n \geq 1$. La contradiction prouve que P possède un zéro dans \mathbb{C} . ■

6.2.2 Principe du maximum

Une fonction holomorphe ne peut pas avoir de maximum local. Ce fait est la conséquence du principe suivant.

Théorème 6.4 (Principe du maximum) *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe borné Ω et continue sur sa fermeture $\bar{\Omega}$. Alors $|f|$ (ou sa partie réelle $\operatorname{Re} f$) atteint son maximum sur la frontière de Ω : $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$. Si le maximum est atteint à l'intérieur de Ω , alors f est une constante.*

PREUVE. D'abord signalons que si la partie réelle u ou le module $|f|$ d'une fonction holomorphe f est constante, alors la fonction est constante. La démonstration est basée sur les conditions de Cauchy-Riemann dans le cas où u est constante. Dans le cas où $|f|$ est constante on applique le même raisonnement à

$$\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg z,$$

où $\ln f(z)$ est la détermination principale du logarithme complexe.

Supposons maintenant que $|f|$ admet un maximum local en z_0 . Sans restreindre la généralité peut supposer que $f(z_0)$ est réel (sinon on multiplie par un complexe correctement choisi, par exemple si $f(z_0) = i$, on considère $-if(z)$). On a alors

$$\operatorname{Re} f(z) \leq |f(z)| = \operatorname{Re} f(z_0).$$

Alors la fonction harmonique $g(z) = \operatorname{Re}(f(z_0) - f(z))$ ne prend que des valeurs positives dans un voisinage de z_0 . g vérifie le théorème de la moyenne^c et on a donc

$$0 = g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + 2\pi i\theta) d\theta \geq 0.$$

Comme g est continue, il vient $g(z) = 0$ sur ce voisinage de z_0 . La partie réelle étant nulle, la fonction $f(z_0) - f(z)$ est constante (conditions de Cauchy-Riemann). Mais cette constante ne peut être que 0 (poser $z = z_0$), donc $f(z) = f(z_0)$. Donc le maximum est atteint sur un voisinage de z_0 . À partir de ce fait on établit que l'ensemble des points où ce maximum est atteint est un ouvert. On montre assez facilement qu'il est fermé dans $\bar{\Omega}$ et donc coïncide avec $\bar{\Omega}$. ■

Ce résultat reste vrai pour le minimum si $f(z)$ ne s'annule pas. En effet, il suffit d'appliquer le résultat précédent à $1/f(z)$.

Chacune des hypothèses sur Ω (ouvert, connexe, borné) est importante.

6.2.3 Prolongement analytique

Comme on l'a vu les propriétés d'une fonction holomorphe (analytique) sont bien plus fortes que la dérivation à un ordre quelconque. Les résultats suivant renforcent cet aspect fondamental.

Théorème 6.5 *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et $z_0 \in \Omega$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$
- (ii) f est identiquement nulle au voisinage de z_0 .
- (iii) f est identiquement nulle sur Ω .

PREUVE. Il est facile de voir que (i) implique (ii) (utiliser la série de Taylor) et l'inverse est trivial. L'implication importante à établir est (ii) \Rightarrow (iii).

Supposons que (ii) est vérifiée. Soit Ω_0 l'ensemble

$$\Omega_0 = \{z_0 : f(z) = 0, \forall z \in B(z_0, \varepsilon_{z_0})\},$$

c'est à dire l'ensemble des points pour lesquels il existe un voisinage où f s'annule. Par construction Ω_0 est ouvert. Il n'est pas vide par hypothèse. On peut vérifier qu'il est fermé. En effet, soit $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega_0$ suite qui converge vers z . Alors pour tout $k \geq 0$ on a

$$f^{(k)}(z_n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

En passant à la limite on trouve $f^{(k)}(z) = 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Donc, d'après (i) $z \in \Omega_0$. Donc Ω_0 est fermé, ouvert, non vide dans un connexe Ω . Il s'ensuit que $\Omega_0 = \Omega$. ■

Une conséquence simple et importante.

Théorème 6.6 (Unicité des fonctions analytiques) *Si deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω coïncident au voisinage d'un point, alors elles coïncident sur Ω .*

Si deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe Ω coïncident sur une suite $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ qui converge vers z_0 , alors elles coïncident sur Ω .

PREUVE. Conséquence immédiate du théorème précédent. ■

c. Passer à la partie réelle dans le théorème de la moyenne.

Corollaire 6.7 *Si une fonction est holomorphe dans un voisinage d'un zéro et n'est pas identiquement nulle alors ce zéro est isolé.*

PREUVE. En effet si z_0 est tel que $f(z_0) = 0$ et ce point n'est pas isolé, il existerait une suite $\{z_n\}$ telle que

$$f(z_n) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0.$$

Donc les fonctions f et 0 coïncident sur cette suite qui converge vers 0. Alors $f = 0$ sur un voisinage de 0, ce qui contredit l'hypothèse de non nullité de f . ■

En fait toute fonction holomorphe dans un voisinage de son zéro z_0 s'écrit sous la forme

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0.$$

L'entier k est la multiplicité du zéro d'une fonction holomorphe.

6.2.4 Pôles et zéros, théorème de Rouché

Une application du théorème des résidus consiste à pouvoir déterminer le nombre de zéros modulo le nombre de pôles (et vice-versa).

Théorème 6.8 *Soit f une fonction méromorphe (quotient de deux fonctions holomorphes) sur un ouvert Ω et A un compact à frontière régulière de Ω . On suppose que f n'a ni racine ni pôle sur ∂A . Alors le nombre de zéros \mathcal{Z} et le nombre de pôles, \mathcal{P} de f dans A est donné par la formule*

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial A} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathcal{Z} - \mathcal{P}.$$

PREUVE. Soit z_0 une racine de multiplicité m de la fonction f . Alors

$$f(z) = (z - z_0)^m h(z), \quad h(z_0) \neq 0.$$

Soit z_0 un pôle d'ordre p de la fonction f . Alors

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z), \quad g(z_0) \neq 0.$$

Dans chaque cas $f(z) = (z - z_0)^k f_1(z)$ avec $k > 0$ si c'est un zéro et $k < 0$ si c'est un pôle, f_1 se s'annulant pas en z_0 .

Alors dans un voisinage de z_0 on a

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{f'_1(z)}{f_1(z)}.$$

D'où le résidu de f en ce point : $\text{res}(f, z_0) = k$. Comme les seules singularités de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ sont les pôles et les zéros de f , on obtient grâce au théorème des résidus appliqué à cette fonction :

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\partial A} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_0 = \text{racine}} k(z_0) + \sum_{z_0 = \text{pôle}} k(z_0) = \mathcal{Z} - \mathcal{P}.$$

■

Une conséquence importante de ce résultat consiste à déduire d'une fonction le nombre de zéros d'une autre fonction.

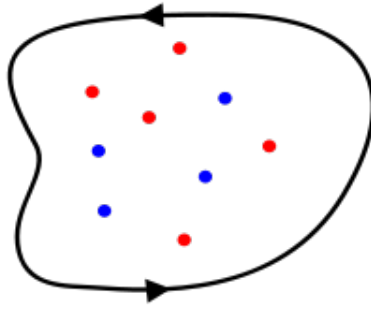


FIGURE 6.3 – Nombres de pôles et de zéros

Théorème 6.9 (Rouché^d) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et A un compact régulier inclus dans Ω . On suppose que $f = f_1 + f_2$ avec f_1 et f_2 holomorphes et que

$$|f_1(z)| > |f_2(z)|, \forall z \in \partial A.$$

Alors f admet dans l'intérieur de A autant de zéros que f_1 .

PREUVE. Pour $t \in [0, 1]$, considérons la fonction

$$n(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial A} \frac{f_1'(z) + t f_2'(z)}{f_1(z) + t f_2(z)} dz.$$

Comme $|f_1| > |f_2|$ sur ∂A , le dénominateur $f_1(z) + t f_2(z)$ ne s'annule pas. D'après le théorème 6.8, la fonction $n(t)$ donne les zéros de la fonction $f_1(z) + t f_2(z)$ (elle n'a pas de pôles). De plus il est facile de voir que $n(t)$ est continue. Prenant ses valeurs (nombre de zéros) dans \mathbb{N} , elle est constante. Donc $n(0) = n(1)$. Ainsi le nombre de zéros de f (exactement $n(1)$) est égal au nombre de zéros de f_1 , c'est à dire $n(0)$. ■

6.2.5 Exemples

1. Considérons les deux fonctions f et g définies par :

$$f(z) = z^8 - 5z^3 + z - 2, \quad g(z) = -5z^3$$

et considérons le contour constitué par le cercle positivement orienté $C(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. On vérifie sur ce contour que :

$$|f(z) - g(z)| = |z^8 + z - 2| \leq |z|^8 + |z| + 2 = 4$$

et

$$|g(z)| = |-5z^3| = 5.$$

On peut donc appliquer le théorème de Rouché $\mathcal{Z}_f = \mathcal{Z}_g$ puisque f et g n'ont pas de pôle. Par ailleurs, g a un zéro triple à l'origine ce qui nous indique donc que la fonction f admet trois zéros dans le disque ouvert $B(0, 1)$. On peut alors les calculer par des méthodes numériques adaptées.

Troisième partie

Transformées intégrales

Chapitre 7

Intégrale de Lebesgue

C'est la notion d'intégrale la plus importante à ce jour, synthèse de plus de deux millénaires de recherche.

7.1 Fonction mesurable

7.1.1 σ -algèbre et mesure

Le but est de développer une notion qui puisse généraliser les notions de longueur, aire, volume, pour des ensembles assez diversifiés dans des espaces de nature quelconque ou du moins assez large pour contenir tout ce dont on aurait besoin...

Par E nous désignerons un ensemble générique qui peut être une partie de \mathbb{R}^n ou de \mathbb{N}^n . Des ensembles plus généraux peuvent être envisagés, mais nous nous limiterons ici à \mathbb{R}^n ou \mathbb{N}^n .

Définition 7.1 Une famille τ de sous-ensembles (parties) de E est appelée σ -**algèbre** (ou **tribu**) si

1. $E \in \tau$;
2. $A \in \tau$ implique $A^C \in \tau$, où A^C est le complément ensembliste de A dans E : $A^C = E \setminus A$;
3. Une réunion dénombrable d'éléments de τ est un élément de τ :

$$A_i \in \tau, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \tau.$$

Il est facile de voir que si τ est une σ -algèbre de E , alors $\{\emptyset, E\} \subset \tau \subset \wp(E)$.

Exemples

1. Les σ -algèbres triviales : $\{\emptyset, E\}$, minimale et $\wp(E)$ toutes les parties de E , maximale.
2. On peut **engendrer** une σ -algèbre en prenant une famille quelconque $\mathcal{F} \subset \wp(E)$ et par complémentation et union dénombrable on obtient une tribu $\tau(\mathcal{F})$.
3. La tribu des **boréliens** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ engendrée par l'ensemble des **ouverts** de \mathbb{R} . Plus généralement, dans un espace topologique abstrait la σ -algèbre engendrée par les ouverts : $\mathcal{F} = \mathcal{O}$.
4. Par exemple : si \mathcal{F} est l'ensemble des singletons de \mathbb{N} , $\tau(\mathcal{F})$ est la tribu dénombrable ou des entiers.

Définition 7.2 Soit μ une application définie sur la σ -algèbre τ

$$\mu : \tau \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+} = \{\mathbb{R}^+, +\infty\}.$$

Elle est appelée mesure si elle est σ -additive et $\mu(\emptyset) = 0$. La σ -additivité signifie que si A_i , $i \in \mathbb{N}$ sont des parties **disjointes** de τ , alors

$$\mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Toutes les mesures considérées ici sont **positives**.

Théorème 7.3 Toute mesure (positive) est **continue monotone**. Autrement dit pour toute suite croissante d'ensembles :

$$B_1 \subset B_2 \subset \dots B_n \dots$$

on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i) = \mu\left(\lim_{i \rightarrow \infty} B_i\right).$$

PREUVE. Se démontre par σ -additivité. ■

Une conséquence immédiate.

Corollaire 7.4 Si $\{A_i\}$ est une suite décroissante d'ensembles de la **tribu mesurée** τ telle que $\mu(A_0) < \infty$, alors

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcap_i A_i\right).$$

On parle d'**ensemble mesuré** quand on se donne le triplet (E, τ, μ) .

C'est le cas d'un ensemble probabilisé si on a un ensemble d'événements et une mesure de probabilité, dans ce cas $\mu(E) = 1$.

Définition 7.5 Dans \mathbb{R} muni de la famille des boréliens (ouverts dans la topologie de la norme, cf. page 3), la mesure m telle que $m([a, b]) = b - a$ est appelé **mesure de Lebesgue**. D'une manière analogue on introduit la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n : sur les pavés

$$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots [a_n, b_n],$$

elle donne $m(B) = (b_1 - a_1) \times \dots \times (b_n - a_n)$.

Théorème 7.6 Soit m une mesure de Lebesgue, alors

1. $m(\{x\}) = 0$ (la mesure d'un singleton est nulle);
2. $m(\mathbb{N}) = m(\mathbb{Q}) = 0$. Il en est de même pour tout ensemble dénombrable.^a
3. $m([a + r, b + r]) = m([a, b])$ (invariance par translation).

Attention ! Si un ensemble a pour mesure 0, cela ne signifie pas qu'il est au plus dénombrable. Contre-exemple : la mesure de l'ensemble de Cantor^b est nulle, alors qu'il n'est pas dénombrable. Soit \mathcal{C} cet ensemble. Il est obtenu en ôtant de l'ensemble $[0, 1]$ les ensembles suivant :

$$\begin{aligned} A_1 &=]1/3, 2/3[; \\ A_2 &=]1/9, 2/9[\cup]7/9, 8/9[; \\ A_3 &=]1/3^3, 2/3^3[\cup]7/3^3, 8/3^3[\cup]19/3^3, 20/3^3[\cup]25/3^3, 26/3^3[; \dots \end{aligned}$$

a. Un ensemble dénombrable est équipotent à \mathbb{N} , tous ses éléments peuvent être numérotés : a_0, a_1, a_2, \dots

b. Georg Cantor (1845-1918), mathématicien allemand qui a contribué à la naissance de la théorie des ensembles.

Calculons la mesure de l'ensemble supprimé pour obtenir \mathcal{C} à partir de $[0, 1]$:

$$m(A_1) = \frac{1}{3}; \quad m(A_2) = 2 \times \frac{1}{3^2}; \quad m(A_3) = 2 \times 2 \times \frac{1}{3^3}; \dots$$

Par conséquent

$$m(\mathcal{C}) = 1 - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

On sait par ailleurs que l'ensemble de Cantor n'est pas dénombrable. Rappelons en bref la démonstration en utilisant l'argument diagonal de Cantor. Si on écrit les nombres de l'ensemble de Cantor dans la base 3, ils auront la forme suivante :

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots, \quad a_i \in \{0, 2\}.$$

Autrement dit on peut écrire tous ces nombres avec les décimales 0 ou 2 à condition de convenir que si un nombre s'écrit 0,1000... par exemple, on le notera 0,0222... car c'est deux représentation du même nombre.

Supposons maintenant que cet ensemble est dénombrable. On peut alors numéroté tous ses éléments :

$$x_1, x_2, x_3, \dots, \quad x_i = 0, a_{i1} a_{i2} a_{i3} \dots$$

Construisons alors le nombre $y = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ de la manière suivante :

$$\alpha_i \in \{0, 2\} \quad \alpha_i \neq a_{ii},$$

autrement dit $\alpha_i = 0$ si $a_{ii} = 2$ et $\alpha_i = 2$ si $a_{ii} = 0$. Alors $y \in \mathcal{C}$ par construction et $y \neq x_i$ pour tout i . La contradiction implique que \mathcal{C} n'est pas dénombrable.

On a donc un ensemble non-dénombrable de mesure de Lebesgue 0.

Définition 7.7 Un ensemble de mesure nulle est dit **négligeable** (au sens de la mesure considérée).

Une propriété vraie sur un ensemble d'index I sauf sur un sous-ensemble $A \subset I$ de mesure μ nulle, $\mu(A) = 0$ est dite vraie μ -presque-partout sur I .

Ainsi une fonction continue par morceaux est continue presque partout, $|\sin t|$ est dérivable presque partout.

7.1.2 Fonction mesurable

Définition 7.8 Soit f une fonction de (E_1, τ_1) dans (E_2, τ_2) On dit que f est mesurable si pour tout $B \in \tau_2$ l'image réciproque $A = f^{-1}(B) \in \tau_1$.

Par exemple une fonction f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} est mesurable si

$$\forall \Omega \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \quad f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

C'est une notion qui ressemble, dans un certain sens, à la continuité^c. Il est facile d'établir les propriétés suivantes.

Théorème 7.9 Soit f, g et $f_n, n \in \mathbb{N}$ des fonctions mesurables de (E, τ) dans $\overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

1. $f + g, f \cdot g, \max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont mesurables ;

c. Une fonction entre deux espaces topologiques est continue si l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.

2. αf est mesurable ;
3. $|f|$ est mesurable ;
4. Si f ne s'annule pas $1/f$ est mesurable ;
5. $\sup f_n$ et $\inf f_n$ sont mesurables ;
6. $f_n(x) \rightarrow h(x)$ p.p. sur Ω alors h est mesurable sur Ω .

La dernière propriété nécessite la définition d'une mesure sur (E, τ) donc d'un espace mesuré (E, τ, μ) et signifie que

$$\mu(\{x \mid f_n(x) \not\rightarrow h(x)\}) = 0.$$

La fonction mesurable la plus simple est la **fonction indicatrice** d'un ensemble :

$$\mathbf{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Cette fonction est souvent notée χ_A , χ étant la première lettre du mot caractéristique en grecque.

Des indicatrices bien connues : **la fonction de Heaviside**

$$H(x) = \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

et la **fonction porte** du segment $[a, b]$

$$\Pi_{[a,b]}(x) = \mathbf{I}_{[a,b]}(x).$$

7.2 Intégrale de Lebesgue

La construction se fait par étape. On définira d'abord l'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive, puis d'une fonction plus générale.

7.2.1 Intégrale de Lebesgue d'une fonction positive

Les fonctions considérées sont définies sur un ensemble mesuré (E, τ, μ) et à valeurs dans \mathbb{R} .

1. Soit A un ensemble mesurable. Pour la fonction indicatrice l'intégrale est définie par

$$\int \mathbf{I}_A d\mu = \mu(A).$$

2. Soit f une fonction **étagée** définie sur E , c'est à dire telle que $f(E)$ est un ensemble fini de cardinal k . On peut alors l'écrire sous la forme

$$f(x) = \sum y_i \mathbf{I}_{A_i}, \quad A_i = \{x \in E : f(x) = y_i, i = 1, \dots, k\}.$$

En supposant que toutes les valeurs sont positives ou nulles, $y_i \geq 0$, on définit

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^k y_i \mu(A_i).$$

Si l'une des mesures est infinie, alors $\int f d\mu = +\infty$.

Théorème 7.10 *Soit f une fonction mesurable positive, alors elle est la limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives et mesurables :*

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in E.$$

On définit alors l'intégrale d'une fonction positive comme le supremum des fonctions étagées dont elle est la limite. Plus généralement :

$$\int f \, d\mu = \sup_{\varphi} \left\{ \int \varphi \, d\mu \mid \varphi \leq f \right\},$$

où φ désigne une fonction étagée positive.

Pour définir l'intégrale sur un ensemble mesurable quelconque de (E, τ, μ) on utilise la fonction indicatrice de cet ensemble

$$\int_A f \, d\mu = \int f \cdot \mathbf{I}_A \, d\mu.$$

Nous pouvons maintenant introduire l'intégrale de Lebesgue par rapport à une mesure μ .

Définition 7.11 (Intégrale de Lebesgue) *Soit f une fonction mesurable et*

$$f^+ = \sup(f, 0), \quad f^- = -\inf(f, 0),$$

de sorte que f^+ et f^- sont positives et on a donc

$$f = f^+ - f^- \quad |f| = f^+ + f^-,$$

de plus $\int |f| \, d\mu$ est bien définie. Si $\int |f| \, d\mu < \infty$, on dit que f est μ -intégrable au sens de Lebesgue et on pose

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

Donnons une propriété immédiate. Rappelons que pour l'intégrale de Riemann, la condition nécessaire est que la fonction soit bornée.

Théorème 7.12 *On a les propriétés suivantes :*

1. *Si f est μ -intégrable alors elle est finie presque partout, c'est à dire partout sauf peut être sur un ensemble de mesure nulle.*
2. *Si f et g sont intégrables et $f = g$ p.p., alors $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.*
3. *Si pour des fonctions f et g **positives** les deux intégrales sont égales, alors $f = g$ p.p.*
4. *L'opération \int conserve la linéarité.*

Comment préciser la différence avec l'intégrale de Riemann ? Historique, exemple et fondement dans ce qui suit.

7.2.2 Comparaison entre l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann

D'abord on peut expliciter la différence de construction puis des exemples.

Construction classique

Cette construction de l'intégrale diffère de l'approche de Riemann (et des intégrales multiples, curvilignes, de surfaces, du même type).

Considérons une fonction définie sur $[a, b]$ et à valeurs dans \mathbb{R} . Dans l'approche de Riemann on cherche la limite des sommes

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad a < x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad \xi_i \in]x_i, x_{i+1}[.$$

On a subdivisé le segment $[a, b]$. Si f est fortement discontinue cette somme peut ne pas avoir de limite car les subdivisions ne tiennent pas compte du comportement de la fonction.

Dans l'approche de Lebesgue (c'est comme ça qu'il a procédé) on subdivise l'image $f([a, b])$ en intervalles (y_i, y_{i+1}) :

$$\inf\{f(x)\} = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = \sup\{f(x)\}$$

et on cherche la limite de

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot m(f^{-1}(y_{i+1}, y_i)),$$

où $f^{-1}(y_{i+1}, y_i)$ et l'image réciproque de l'intervalle (y_{i+1}, y_i) (ouvert, fermé ou semi-ouvert).

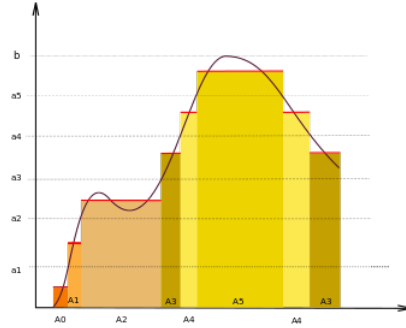


FIGURE 7.1 – Construction de Lebesgue

Différence fondamentale

On considère des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , l'intégrale de Lebesgue utilise la mesure de Lebesgue, elle sera notée dx . Notons par $\mathbf{R} \int$ et $\mathbf{L} \int$ les intégrales de Riemann et Lebesgue respectivement. Soit $[a, b]$ un segment fini.

Si

$$\mathbf{R} \int_a^b f(x) dx$$

existe, alors l'intégrale de Lebesgue existe et elles sont égales :

$$\mathbf{L} \int_a^b f(x) dx = \mathbf{R} \int_a^b f(x) dx.$$

Si

$$\int_a^b f(x) dx$$

existe en tant qu'intégrale *impropre (généralisée)* comme limite de \mathbf{R} -intégrales, alors l'intégrale

$$\mathbf{L} \int_a^b f(x) dx$$

n'est pas nécessairement bien définie. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que la fonction soit *absolument* intégrable.

Exemples

1. On peut donner un exemple simple de fonction (bornée) intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in [0, 1], x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Essayons de vérifier l'intégrabilité au sens de Riemann. La somme de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

donnera 0 si on prend ξ_i irrationnels et 1 si tous les ξ_i sont rationnels et les deux possibilités sont admissibles quelle que soit la subdivision du segment $[0, 1]$. Les sommes de Riemann n'ont donc pas de limite quand le diamètre de la subdivision tend vers 0.

On vérifie facilement que l'intégrale de Lebesgue est égale à 0.

2. L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

est bien définie comme intégrale généralisée (impropre) au sens de Riemann mais comme la fonction

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

n'est pas absolument convergente sur $[0, \infty[$, autrement dit

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty,$$

alors $f(x)$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$.

Chapitre 8

Intégrales de fonctions paramétrées

On considère d'abord le comportement de suites de fonctions $f_n(x)$, autrement dit quand le paramètre est $n \in \mathbb{N}$.

8.1 Suites et séries de fonctions

On évoquera ici deux grands résultats sur la convergence monotone (fonctions positives) et la convergence dominée (ici la “domination” est vérifiée presque partout seulement).

8.1.1 Convergences monotone et dominée

Théorème 8.1 (Beppo Levi^a, convergence monotone) *Soit f_n une suite croissante de fonctions positives et mesurables définies sur $\{E, \tau, \mu\}$. Alors pour tout ensemble mesurable $A \subset E$ on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \, d\mu,$$

cette limite pouvant être égale à $+\infty$. Si la limite est finie, la fonction

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$$

est μ -intégrable.

PREUVE. Remarquons d'abord que la fonction $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ est mesurable et l'intégrale

$$I = \int_A f \, d\mu$$

est finie ou infinie. Soit

$$I_n = \int_A f_n \, d\mu$$

Comme la suite de fonctions est croissante et majorée par f , la suite (à valeurs dans $[0, \infty]$) est croissante et donc sa limite (éventuellement infinie) existe et cette suite est majorée par I . On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n \leq I.$$

Il faut maintenant montrer l'inégalité inverse. On utilise alors les fonctions étagées. Soit φ une fonction étagée telle que

$$0 \leq \varphi \leq f.$$

a. Beppo Levi (1875-1961), mathématicien italien.

Soit c une constante strictement inférieure à 1, posons

$$A_n = \{x \in A \mid f_n(x) \geq c\varphi(x)\}.$$

Par construction, on a :

$$I_n \geq \int_{A_n} f_n(x) \, d\mu \geq c \int_{A_n} \varphi \, d\mu.$$

De plus, les ensembles mesurables A_n forment une suite croissante dont la réunion est A . Par conséquent,

$$\lim \int_{A_n} \varphi \, d\mu = \int_A \varphi \, d\mu.$$

On a donc, pour tout c tel que $0 < c < 1$, pour toute fonction étagée φ telle que $0 \leq \varphi \leq f$, l'inégalité

$$I_n \geq c \int_A \varphi \, d\mu.$$

Donc, par définition de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive

$$I_n \leq \int_A f \, d\mu.$$

■

Ce théorème, concernant les fonctions positives, est assez général. Il est typique des possibilités de l'intégrale de Lebesgue. Il n'est pas valable si l'intégrale considérée est celle de Riemann.

En effet, considérons la suite de fonctions f_n , $n = 1, \dots$ définie sur $[0, 1]$ de la manière suivante. Soit

$$Q_{[0,1]} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\},$$

l'ensemble (dénombrable) des rationnels du segment $[0, 1]$ dans l'ordre croissant. Posons

$$f_n(x) = 1, \quad x \in Q_n = \{q_1, \dots, q_n\}; \quad f_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad x \notin Q_n.$$

La suite f_n est croissante, les fonctions sont positives. La suite converge vers la fonction vue au chapitre précédent

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in [0, 1], \quad x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

non intégrable au sens de Riemann. Beppo-Levi est applicable pour l'intégrale de Lebesgue :

$$\int_{[0,1]} f_n(x) \, dx = \int_{[0,1]} f(x) \, dx = 0.$$

La conséquence simple du théorème de Beppo-Levi est le corollaire suivant.

Corollaire 8.2 Soit A_n une suite d'ensembles mesurables **disjoints** et A leur union : $A = \cup_n A_n$. Soit f une fonction **positive** et mesurable, alors

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f \, d\mu.$$

C'est une espèce de σ -additivité de l'intégrale.

PREUVE. On introduit une suite de fonctions f_n , $n = 1, 2, \dots$ définies sur A par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \bigcup_{i=1}^n A_i \\ 0 & \text{si } x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que les fonctions sont positives et forment une suite croissante qui converge vers f :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \quad \forall x \in A.$$

Par le théorème de Beppo-Levi on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu. \quad (8.1.1)$$

Mais

$$\int_A f_n \, d\mu = \int_{\bigcup_{i=1}^n A_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \, d\mu.$$

Alors la relation (8.1.1) peut s'écrire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Ce qui donne le résultat du corollaire car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} f \, d\mu.$$

■

Corollaire 8.3 (Convergence monotone pour les séries) Soit f_n une suite de fonctions positives mesurables définies sur $\{E, \tau, \mu\}$, alors pour toute $A \subset E$ on a

$$\int_A \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Les deux séries convergent ou divergent en même temps.

PREUVE. Il suffit d'appliquer le théorème de Beppo-Levi aux fonctions

$$\Phi_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x),$$

qui sont positives, mesurables et forment une suite croissante.

■

Le résultat suivant est l'un des résultats importants dû à Lebesgue.

Théorème 8.4 (Convergence dominée) Soit g une fonction positive intégrable et f_n une suite de fonctions réelles, mesurables sur (E, τ, μ) et telles que

- i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ presque partout sur E ;
- ii) $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout sur E .

Alors la fonction f est intégrable sur tout ensemble $A \in \tau$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Comme on le remarquera, ici on n'exige aucune **convergence uniforme**.

Les deux résultats précédents nous permettent d'obtenir un théorème analogue pour les séries.

Théorème 8.5 (Convergence dominée pour les séries) Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions réelles définies sur (E, τ, μ) telle que

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_E |f_i| \, d\mu < \infty.$$

Alors la fonction $\sum_{i=0}^{\infty} f_i$ est **définie presque partout**, intégrable et

$$\int_E \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i \right) \, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_E f_i \, d\mu \right).$$

PREUVE. On donne la preuve de ce résultat comme application des théorèmes de Beppo-Levi (convergence monotone) et celui de Lebesgue (convergence dominée).

On pose

$$\Phi_n(x) = \sum_{i=0}^n |f_i|.$$

La suite de fonctions $\{\Phi_n\}$ positives est monotone croissante. Elle a donc une limite, finie ou infinie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(x) = \Phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} |f_i|.$$

En fait Φ est définie là où la série $\sum_{i=0}^{\infty} |f_i|$ des modules converge. La convergence monotone (Beppo-Levi) donne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \Phi_n(x) \, d\mu = \int_E \Phi \, d\mu, \quad (8.1.2)$$

finie ou infinie.

Par ailleurs,

$$\int_E \Phi_n \, d\mu = \sum_{i=0}^n \int_E |f_i| \, d\mu \leq \sum_{i=0}^{\infty} \int_E |f_i| \, d\mu < \infty,$$

par hypothèse. Par conséquent, les sommes partielles convergent et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \Phi_n(x) \, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_E |f_i| \, d\mu. \quad (8.1.3)$$

Les deux relations (8.1.2) et (8.1.3) donnent

$$\int_E \Phi \, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} \int_E |f_i| \, d\mu < \infty$$

On en conclut que Φ est intégrable et donc **finie p.p.** Par construction de Φ , la série $\sum f_i$ est absolument convergente p.p. et donc converge presque partout vers une certaine fonction $F(x)$.

Considérons alors la suite de fonction $\{F_n\}$:

$$F_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x).$$

Cette suite de fonctions $\{F_n\}$ converge p.p. et elle est dominée par $\Phi(x)$:

$$F_n(x) \rightarrow F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i, \quad |F_n(x)| \leq \Phi(x), \quad \text{p.p.}$$

On applique alors le théorème de la convergence dominée à cette suite de fonctions. On obtient donc

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_E f_i \, d\mu \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n(x) \, d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) \, d\mu = \int_E \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_i \right) \, d\mu.$$

■

8.1.2 Exemples

1. On considère la suite de fonctions

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{2}}x, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \neq 0, \quad f_n(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite de fonctions converge donc presque partout vers la fonction positive $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. On remarquera que la convergence n'est pas uniforme (poser $x_n = \frac{1}{2n}$ et calculer la limite). Par ailleurs

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx$$

converge (règle de Riemann). La suite de fonctions est majorée par une fonction intégrable. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x}|_0^1 = 2.$$

Attention : la fonction majorante n'est pas nécessairement la fonction limite.

2. On considère la fonction

$$f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1 + n^2x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

On vérifie facilement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

la convergence n'étant pas uniforme (ce qui peut se vérifier en posant $x_n = \frac{1}{n}$ et en passant à la limite) et

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \text{p.p. sur } [0, 1].$$

On peut appliquer le théorème de Lebesgue (convergence dominée) et on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

Il n'est pas toujours facile de trouver une fonction majorante.

Précisons qu'il peut ne pas exister de fonction majorant la suite de fonctions.

3. Maintenant donnons un contre-exemple montrant que la condition de majoration est essentielle. Considérons la suite

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} n^3 t^2 \exp(-n^2 t^2) dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sachant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi},$$

on obtient facilement

$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} n^2 t^2 \exp(-n^2 t^2) d(nt) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ce qui donne $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par ailleurs

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 t^2 \exp(-n^2 t^2)) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dt = 0.$$

Donc on ne peut pas permuter le passage à la limite et l'intégration. Le théorème sur la convergence dominée n'est pas applicable.

En fait la majoration possible des fonctions sous le signe de l'intégrale est donnée par la fonction

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{t} = c \cdot \frac{1}{t}$$

qui n'est pas intégrable sur l'ensemble considéré : $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

8.2 Intégrales paramétrées

8.2.1 Continuité

Le résultat sur la continuité est proche de celui de la convergence dominée et, en fait, se déduit de celui-ci.

Théorème 8.6 Soit f une fonction définie sur $[a, b] \times E$

- i) mesurable en x pour tout $t \in [a, b]$;
- ii) continue en t_0 pour presque tous les $x \in E$;
- iii) $|f(t, x)| \leq g(x)$, $\forall t \in [a, b]$ et pour presque tous les $x \in E$, g étant intégrable.

Alors la fonction

$$F(t) = \int_E f(t, x) \, d\mu(x)$$

est continue en t_0 .

PREUVE. On applique le théorème de la convergence dominée et la définition de Heine^b de la continuité en t_0 . ■

8.2.2 Dérivation

De la même manière que pour la continuité, on obtient une condition de dérivabilité d'une intégrale paramétrée.

Théorème 8.7 Soit f une fonction définie sur $[a, b] \times E$

- i) intégrable en x pour tout $t \in [a, b]$;
- ii) dérivable dans un voisinage V de t_0 pour presque tous les $x \in E$;
- iii) $|\frac{\partial f(t, x)}{\partial t}| \leq g(x)$, $\forall t \in V \subset [a, b]$ et p.p. tous les $x \in E$, g étant intégrable.

Alors la fonction

$$F(t) = \int_E f(t, x) \, d\mu(x)$$

est dérivable en t_0 et

$$F'(t_0) = \frac{dF}{dt}(t_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x) \, d\mu(x)$$

8.2.3 Intégrale double et permutation d'intégrales

Ce théorème bien connue pour l'intégrale de Riemann (voir dans le chapitre 1.5, le théorème 1.1) développe toute sa richesse et précision pour le cas de l'intégrale de Lebesgue. Nous allons préciser sa formulation dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Des formulations plus générales sont possibles, dans le même esprit.

D'abord un contre-exemple. On considère la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (x, y) \in]0, 1] \times]0, 1].$$

On peut vérifier

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \right) dy = - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} \Big|_0^1 dy = -\frac{\pi}{4}$$

et

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \right) dx = + \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_0^1 dx = +\frac{\pi}{4}.$$

Ce qui signifie qu'on ne peut pas permuter l'ordre d'intégration pour cette fonction et dans ce domaine d'intégration.

Le théorème de Fubini donne des conditions suffisantes autorisant cette permutation.

Théorème 8.8 (Fubini) Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable et $A \times B$ un ensemble borélien de \mathbb{R}^2 .

b. La fonction h est continue en t_0 si pour toute suite $\{t_n\}$ convergeant vers t_0 la suite $\{h(t_n)\}$ converge vers $h(t_0)$

1. Si f est positive sur $A \times B$, alors

$$\int_{A \times B} f(x, y) \, dx \, dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) \, dx \right) \, dy,$$

les valeurs des intégrales peuvent être $+\infty$.

2. Si l'intégrale du module est finie, c'est à dire si

$$\int_{A \times B} |f(x, y)| \, dx \, dy < \infty,$$

alors les fonctions

$$x \mapsto f(x, y), \quad \text{et} \quad y \mapsto f(x, y)$$

sont intégrables p.p. pour les valeurs respectives de x et y , les fonctions

$$\varphi(x) = \int_B f(x, y) \, dy, \quad \text{et} \quad \psi(y) = \int_A f(x, y) \, dx$$

sont intégrables sur A et B et

$$\int_{A \times B} f(x, y) \, dx \, dy = \int_A \left(\int_B f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_B \left(\int_A f(x, y) \, dx \right) \, dy.$$

On peut vérifier que dans l'exemple donné plus haut c'est l'absence de convergence absolue de l'intégrale sur $[0, 1] \times [0, 1]$ qui fait que le théorème de Fubini ne peut pas s'appliquer.

Enfin signalons qu'on peut toujours effectuer un changement de variable sur la fonction sous le signe de l'intégrale. Le terme correcteur est toujours, comme pour l'intégrale de Riemann, le module du jacobien du difféomorphisme, cf. le théorème 1.3, page 9. La formulation est identique mais l'intégrale est celle de Lebesgue.

Chapitre 9

Les espaces L^p

C'est les espaces dits de Lebesgue. Nous commencerons d'abord par quelques précisions sur les espaces abstraits de Banach et de Hilbert.

9.1 Espaces de Banach et de Hilbert

Soit X un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} (en fait \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Muni d'une norme, cet espace est dit normé. La **norme** vérifie les axiomes suivants :

1. $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$. Si $\|x\| = 0$ alors $x = 0$;
2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Cette norme induit une topologie (convergence, ouverts, fermés, compacts, etc).

Nous avons déjà utilisé le produit scalaire dans \mathbb{R}^n dans la première partie de cet ouvrage. Dans un espace vectoriel abstrait on peut aussi introduire un produit scalaire entre deux vecteurs :

$$x, y \mapsto \langle x, y \rangle \in \mathbb{K},$$

à condition que cette forme vérifie les axiomes suivant :

1. $\forall x \in X, \langle x, x \rangle \geq 0$. Si $\langle x, x \rangle = 0$ alors $x = 0$;
2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
3. $\forall x, y, z \in X, \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
4. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, où $\bar{\alpha}$ est le conjugué de α dans le cas complexe. Si l'espace est réel $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

On introduit la notion de **suite de Cauchy**, c'est une suite $\{x_n\} \subset X$ telle que

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0,$$

la convergence étant indépendante de la relation entre n et m . Dans un espace normé une suite de Cauchy ne converge pas nécessairement (cf. exemple dans le paragraphe 9.1.1).

Si toute suite de Cauchy admet une limite l'espace est dit **complet**. Un espace normé de dimension finie est toujours complet. Toutes les normes sont équivalentes, elles engendrent la même topologie.

Définition 9.1 *Un espace vectoriel normé et complet est appelé **espace de Banach**^a.*

a. Stefan Banach (1892-1945) est un mathématicien polonais. Son nom se prononce 'banax, x étant ici comme la lettre grecque χ ou l'espagnol j dans Jerez (xérès).

Définition 9.2 Soit X un espace vectoriel muni d'un produit scalaire. On peut y introduire la norme $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Si cet espace normé est complet pour la norme du produit scalaire, il est appelé **espace de Hilbert**^b. Pour un espace de dimension finie on parle souvent d'espace euclidien (réel) ou hermitien (complexe).

9.1.1 Exemples

1. Les espaces vectoriels normés de dimension finie sont tous complets. Le critère de Cauchy de convergence d'une suite reflète ce fait. Si la norme est induite d'un produit scalaire on dit que c'est un espace euclidien (dans le cas réel, cf. chapitre 1) ou hermitien (cas complexe).

2. Considérons l'espace vectoriel des fonctions^c réelles définies et continues sur le segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Muni de la norme

$$\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|,$$

cet espace est complet, c'est donc un espace de Banach noté $C[a, b]$. De la même manière si l'on considère l'ensemble des fonctions continues d'un compact K dans \mathbb{R}^n on obtient un espace de Banach $C(K, \mathbb{R}^n)$.

3. Si on prend le même espace vectoriel des fonctions réelles, définies et continues sur le segment $[a, b]$ muni de la norme

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt,$$

alors on peut montrer que cet espace n'est pas complet. En effet, considérons sur $[0, 1]$ la suite de fonctions $x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}^*$ dont les graphes sont les lignes brisées passant par les points :

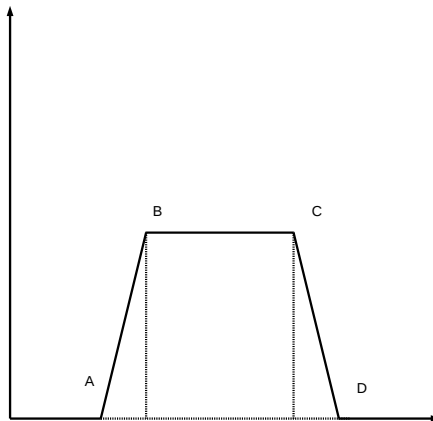


FIGURE 9.1 –

b. David Hilbert (1862-1943) est un mathématicien allemand.

c. L'addition et la multiplication par un scalaire étant l'addition de fonctions et la multiplication d'une fonction par un scalaire.

$$O = (0, 0), \quad A_n = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n}, 0\right), \quad B_n = \left(\frac{1}{3}, 1\right), \quad C_n = \left(\frac{2}{3}, 1\right), \quad D_n = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4n}, 0\right), \quad E = (1, 0).$$

Ce sont bien des fonctions affines par morceaux mais continues. Calculons $\|x_n - x_m\|$. On voit facilement que

$$\|x_n - x_m\| = \int_0^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt = \left| \frac{1}{4n} - \frac{1}{4m} \right|.$$

Par conséquent $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ quand $n, m \rightarrow \infty$. C'est une suite de Cauchy. Mais cette suite n'a pas de limite dans l'espace des fonctions continues muni de la norme intégrale. En réalité, la fonction limite n'est pas continue :

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{3}[, \\ 1, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 0, & t \in]\frac{2}{3}, 1]. \end{cases}$$

Cet espace normé n'est pas complet.

Une des raisons de la construction de l'intégrale de Lebesgue est justement de pouvoir utiliser un espace fonctionnel complet pour la norme intégrale, même si cela n'est pas une fin en soi.

Remarquons qu'il y a une norme intégrale liée à un produit scalaire :

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t) dt, \quad \|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais comme l'espace des fonctions continues muni de cette norme n'est pas complet non plus, ce n'est pas un espace de Hilbert. On dit parfois qu'il est pré-hilbertien.

9.2 Les espaces de Lebesgue L^p

Soit (E, τ, μ) un ensemble mesuré. Vu les propriétés de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue, l'ensemble des fonctions réelles (ou complexes) mesurables forme, naturellement, un espace vectoriel sur \mathbb{R} (ou \mathbb{C}). Soit f une fonction intégrable, on peut introduire la fonction de f

$$p(f) = \int_E |f(x)| d\mu.$$

Est ce une norme sur cet espace de fonctions ? Les deux derniers axiomes de la norme sont vérifiés. Cependant, si $p(f) = 0$, on obtient $f(x) = 0$ p.p. sur E . La fonction f n'est pas nulle au sens strict du terme, p n'est pas une norme. Par contre si on **ne distingue pas les fonctions égales presque partout** on peut alors dire que p est une norme.

Définition 9.3 *L'espace des fonctions μ -intégrables sur E , définies à un ensemble négligeable près (des fonctions égales presque partout sont assimilées à une seule fonction) muni de la norme*

$$\|f\| = \int_E |f(x)| d\mu,$$

est un espace normé noté $L^1(E, \tau, \mu)$ (L pour Lebesgue).

En fait c'est un espace **quotient** par rapport à la relation d'équivalence **égalité presque partout**.

Théorème 9.4 *L'espace normé $L^1(E, \tau, \mu)$ est complet, c'est donc un espace de Banach.*

On peut introduire d'autres espaces de Lebesgue. Si on considère les fonctions mesurables telles que $\int_E |f(x)|^p d\mu$, pour $p \geq 1$ on peut montrer que cet ensemble muni des opérations algébriques naturelles est un espace vectoriel (ce n'est pas trivial). De plus, munis de la norme (non triviale!)

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

c'est des espaces de Banach. Attention : la condition $p \geq 1$ est essentielle, pour $p < 1$ ce n'est pas une norme.

Le cas $p = 2$ est d'un intérêt particulier. En fait on peut introduire la forme bilinéaire

$$\langle f, g \rangle = \int_E f(x)g(x) d\mu$$

qui est un produit scalaire si on convient de considérer les classes de fonctions égales presque partout. Si les fonctions sont à valeurs complexes on prendra le soin de remplacer sous le signe de l'intégrale g par \bar{g} .

Théorème 9.5 *La norme induite par ce produit scalaire est la norme $\|\cdot\|_2$. Alors l'espace L^2 est complet et c'est donc un espace de Hilbert.*

Les espaces L^p ayant le bon goût d'être complets, on aimerait les comparer ou les utiliser en relation avec l'espace des fonctions continues ou à dérivées continues. Le résultat suivant offre cette possibilité.

Théorème 9.6 *L'espace des fonctions de classe $C^k, k \in \mathbb{N}$ à support borné dans \mathbb{R} est dense dans $L^p(\mathbb{R}), p > 1$, autrement dit sa fermeture (son adhérence^d) dans $L^p(\mathbb{R})$ coïncide avec $L^p(\mathbb{R})$.*

Le support d'une fonction est l'adhérence de l'ensemble où elle n'est pas nulle

$$S_f = \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Il en découle le résultat fondamental suivant.

Théorème 9.7 (Riemann-Lebesgue) *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ on a*

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx = 0.$$

C'est vrai, en particulier, si $\alpha \in \mathbb{N}$.

PREUVE. Est basée sur l'approximation d'une fonction de L^1 par des fonctions de classe C^1 pour ces dernières le théorème s'obtient par une intégration par partie. ■

9.3 La convolution dans L^1

Concept central en théorie des fonctions. Nous verrons mieux son intérêt dans les chapitres suivants. Pour le moment nous introduisons la notion et ses propriétés.

Ici \mathbb{R} est muni de la mesure de Lebesgue m sur les boréliens, on notera $dm(x)$ par dx tout simplement.

d. Autrement dit toutes les fonctions de C^k et les limites de suites de ces fonctions.

Définition 9.8 Soit f, g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$. Le **produit de convolution** ou simplement la **convolution** de f et g est la fonction $f * g$ définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

La fonction $f * g$ est définie presque partout sur \mathbb{R} car $f(u)g(v)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$ et parce-qu'on peut appliquer le théorème de Fubini (cf. page 85).

Les propriétés de la convolution sont les suivantes.

Théorème 9.9 Pour toutes fonctions f, g, h de $L^1(\mathbb{R})$ on a

1. $f * g \in L^1(\mathbb{R})$;
2. $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$;
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$;
4. $f * g = g * f$;
5. $f * (g + h) = f * g + f * h$,
6. si $g \in C^1 \cap L^1$ et la dérivée g' est bornée, alors $(f * g)' = f * g' = g' * f$. Ainsi, la convolution est une opération **régularisante**^e.

Dans ces propriétés toutes les fonctions sont dans L^1 . Si une des fonctions n'est pas dans L^1 , même si les convolutions peuvent être définies, l'associativité peut être mise en défaut.

Exemple

On pose

$$f(x) = \mathbf{I}_{[0,1]}(x) = \chi_{[0,1]}, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = \mathbf{I}_{[0,+\infty[}(x) = \chi_{[0,+\infty[}.$$

On voit que g n'est pas dans L^1 pourtant $f * g$ et $h * g$, par exemple, sont bien définies et on a

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,1]}(t) \cdot g(x-t) dt = \int_0^1 e^{x-t} dt = e^x(1 - e^{-1}), \\ (f * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,1]}(t) \cdot \mathbf{I}_{[0,+\infty[}(x-t) dt = x \mathbf{I}_{[0,1]}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1], \\ 0, & x \notin [0, 1], \end{cases} \\ (h * g)(x) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,1]}(t) e^{x-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{x-t} dt = e^x, \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} f * (h * g) &= \int_{\mathbb{R}} \mathbf{I}_{[0,1]}(t) e^{x-t} dt = (1 - e^{-1})e^x \\ (f * h) * g &= \int_0^1 t e^{x-t} dt = (1 - 2e^{-1})e^x. \end{aligned}$$

Par conséquent on a ici $f * (h * g) \neq (f * h) * g$. C'est dû au fait que $g \notin L^1(\mathbb{R})$.

e. Régulariser : rendre plus lisse, plus dérivable.

Chapitre 10

La transformée de Fourier

Comme la décomposition d'une fonction en série de Fourier ^a, la transformée de Fourier est un outil fondamental en mathématiques et en sciences de l'ingénieur : théorie du signal, probabilités, équations aux dérivées partielles, etc. Cela consiste à passer d'un domaine physique dans un autre domaine physique, en l'occurrence : du **temporel** au **fréquentiel**. Cette transformée sera appliquée d'abord dans l'espace L^1 puis dans l'espace L^2 par l'intermédiaire de l'espace des fonctions à décroissance rapide.

10.1 Transformée de Fourier dans L^1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ où \mathbb{R} est muni de la mesure de Lebesgue sur les boréliens.

Définition 10.1 On appelle transformée de Fourier l'application \mathcal{F} qui à la fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ fait correspondre la fonction $\mathcal{F}(f)$ définie par

$$\mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi yx} f(x) dx, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Physiquement, le paramètre y est assimilé à une fréquence ou à une pulsation. En physique, À l'électronique ou en traitement du signal on utilise plutôt les variables $\nu = y$ ou $\omega = 2\pi y$ qui représentent la fréquence ou la pulsation. On utilise aussi des formules avec le coefficient $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ devant le signe de l'intégrale. Ces différentes conventions modifient certaines formules mais pas les résultats fondamentaux.

Nous nous tiendrons à notre définition pour diverses raisons, en particulier celle liée à l'expression de la transformée inverse.

Les propriétés élémentaires qui découlent directement de la définition :

1. La linéarité ;
2. Si la fonction f est paire alors

$$\mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi xy) f(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \cos(2\pi xy) f(x) dx$$

et \widehat{f} est réelle si f est réelle ;

3. Si la fonction f est impaire alors

$$\mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) = -i \int_{\mathbb{R}} \sin(2\pi xy) f(x) dx = -2i \int_0^{+\infty} \sin(2\pi xy) f(x) dx$$

a. Joseph Fourier (1768-1830), mathématicien et physicien français

et \widehat{f} est imaginaire pure si f est réelle ;

À cause des propriétés liées à la parité on introduit les **transformées sinus et cosinus de Fourier**

$$\mathcal{F}_c(f)(y) = \int_0^\infty \cos(2\pi xy) f(x) dx, \quad \mathcal{F}_s(f)(y) = \int_0^\infty \sin(2\pi xy) f(x) dx$$

Moins triviales mais non moins importantes sont les propriétés suivantes.

Théorème 10.2 Soit f et g des fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$.

1. \widehat{f} est bornée, continue et

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(y) = 0,$$

ce qui est noté $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

2. $\widehat{f} \cdot g \in L^1$ et $f \cdot \widehat{g} \in L^1$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \widehat{g}(t) dt.$$

3. **Changement de signe**

$$\mathcal{F}(f(-x))(y) = \widehat{f}(-y).$$

4. **Retard ou décalage**

$$\mathcal{F}(f(x-a))(y) = e^{-2\pi i a y} \widehat{f}(y).$$

5. **Modulation**

$$\widehat{f}(y-b) = \mathcal{F}\left(e^{2\pi i b x} f(x)\right)(y).$$

6. **Changement d'échelle** : concentration ($|a| < 1$), dilatation ($|a| > 1$)

$$\mathcal{F}(f(ax))(y) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{y}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

PREUVE. Les propositions 3)–6) se démontrent directement à partir de la définition par des changements de variable adéquats.

Dans la proposition 1), la continuité découle de la convergence uniforme de l'intégrale majorée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx.$$

La convergence vers 0 découle du lemme de Riemann-Lebesgue (théorème 9.7). La proposition 2) est basée sur l'application du théorème de Fubini (th. 8.8) et des changements de variables. ■

Les formules de dérivations ont des applications multiples.

Théorème 10.3 Il s'agit de dériver soit la fonction originale soit l'image.

1. Si $f \in C^n(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $k = 0, 1, \dots, n$ on a $f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(y) = (2\pi i y)^k \widehat{f}(y), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Ce qui implique les inégalités :

$$|\widehat{f}(y)| \leq \frac{1}{(2\pi y)^k} \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}| dx, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

2. Si pour tout $k = 0, 1, \dots, n$ on a $x^k f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} \in C^{(n)}$ et

$$\widehat{f}^{(k)} = (-2\pi i)^k \mathcal{F}(x^k f(x)), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

La première proposition signifie que la transformée de Fourier décroît d'autant plus rapidement vers 0 que l'originale est dérivable. Cette propriété est analogue à celle des coefficients de la série de Fourier d'une fonction dérivable.

PREUVE.

1. Pour $k = 1$ on fait une intégration par partie, puis on procède par récurrence sur k .
2. On procède par dérivation sous le signe de l'intégrale. ■

Corollaire 10.4 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ est à support borné, alors $\widehat{f} \in C^\infty$.

Autrement dit pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, si il existe un segment $[a, b]$ tel que $f(x) = 0$ quand $x \notin [a, b]$, alors $\widehat{f} \in C^\infty$.

Attention ! Le fait que l'image \widehat{f} soit de classe C_0 ou même C_0^∞ ne signifie pas qu'elle soit L^1 . Le contre-exemple classique est la fonction porte dont la transformée est donnée dans le paragraphe suivant.

10.1.1 Exemples

1. On se propose de calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-\pi x^2}$. On a bien $f \in L^1(\mathbb{R})$, de plus nous savons que^b

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

On a

$$f'(x) = -2\pi x f(x),$$

d'où il vient par application de \mathcal{F}

$$\mathcal{F}(f'(x)) = -2\pi \mathcal{F}(x f(x)).$$

En utilisant les formules de dérivation :

$$2i\pi y \widehat{f} = -2\pi \cdot \frac{1}{-2i\pi} (\widehat{f})'.$$

Ce qui donne

$$-4\pi^2 y \widehat{f} = 2\pi (\widehat{f})'.$$

La fonction image \widehat{f} vérifie donc l'équation différentielle

$$\widehat{f}' + 2\pi y \widehat{f} = 0$$

et la condition

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

d'après la définition de la transformée de Fourier en posant $y = 0$. Alors

$$\widehat{f}(y) = C \cdot e^{-\pi y^2}, \quad C = 1,$$

b. On connaît mieux $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, ce qui implique le résultat par un simple changement de variable.

et par conséquent $\hat{f}(y) = e^{-\pi y^2}$. La fonction $e^{-\pi x^2}$ est un point fixe de la transformation \mathcal{F} ou un vecteur propre correspondant à la valeur propre 1.

2. Dans cet exemple l'image n'est pas de classe $L^1(\mathbb{R})$, comme cela a été évoqué plus haut.

On considère la **fonction porte** (Figure 10.1) définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-a, +a], \\ 0, & x \notin [-a, +a]. \end{cases} \quad (10.1.1)$$

Sa transformée de Fourier peut être obtenue par un calcul direct simple. C'est la fonction **sinus**

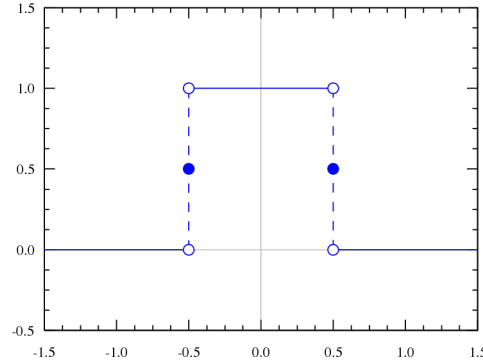


FIGURE 10.1 – Fonction porte f , $a = 0,5$

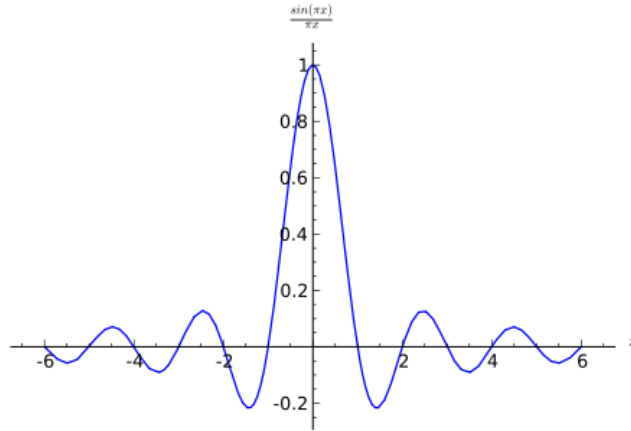


FIGURE 10.2 – Sinus cardinal normalisé $a = 0.5$

cardinal (Figure 10.2) :

$$\hat{f}(y) = \frac{\sin(2\pi ay)}{\pi y} = 2a \operatorname{sinc}(2\pi ay), \quad (10.1.2)$$

qui n'est pas de classe L^1 (l'intégrale de $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$ converge mais pas absolument sur \mathbb{R}).

10.2 Transformée de Fourier inverse et convolution

On se pose naturellement la question de pouvoir retrouver une fonction à partir de sa transformée de Fourier. Cette opération n'est pas toujours possible. Mais on peut toujours définir la transformée

inverse :

$$g \in L^1(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi xy} g(y) dy,$$

transformée toujours définie sur $L^1(\mathbb{R})$.

D'une manière générale, \widehat{f} n'est pas nécessairement dans L^1 . Si c'est le cas on peut retrouver la fonction d'origine à partir de la fonction de \widehat{f} .

Théorème 10.5 Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f} = \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$f \stackrel{p.p.}{=} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$$

c'est à dire

$$f(x) \stackrel{p.p.}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{2i\pi xy} \widehat{f}(y) dy.$$

De même si $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et $f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\widehat{f} \stackrel{p.p.}{=} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f})), \quad \widehat{f}(x) \stackrel{p.p.}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi xy} f(y) dy$$

Si f est continue, les égalités sont vérifiées partout.

PREUVE. Compliquée. ■

L'une des interprétations de ce résultat c'est que la transformée de Fourier et son inverse ont un rôle analogue. D'ailleurs on note souvent à cause de ça et à cause de la formule de définition des deux transformations :

$$\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}.$$

Pour ne pas simplifier les choses, dans certains ouvrages, c'est $\overline{\mathcal{F}}$ qui est la transformée et \mathcal{F} son inverse. Ça ne change pas grand chose dans tout ce qui a été écrit ici.

La pleine signification de cette relation se verra dans $L^2(\mathbb{R})$ qui est un espace de Hilbert.

La propriété la plus importante, s'il en est, de la transformée de Fourier est son action sur la convolution.

Théorème 10.6 (Transformée de Fourier d'une convolution) La convolution des fonctions c'est la multiplication modulo la transformée de Fourier :

1. Si f et g sont intégrables sur \mathbb{R} , alors

$$\widehat{f * g} = \widehat{f} \cdot \widehat{g}.$$

2. Si $f, g, f \cdot g, \widehat{f}$ et \widehat{g} sont intégrables sur \mathbb{R} , alors

$$\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$$

PREUVE.

1. Démonstration par Fubini.

2. On utilise la transformée inverse et la propriété 1.

$$\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f * g}) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}) = f \cdot g.$$

D'où

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f * g}) = \widehat{f * g}.$$

■

10.2.1 Exemple

Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}, \quad 0 < a < b, \quad (10.2.1)$$

où f est la fonction inconnue. Posons $g_a(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ et $g_b(x) = \frac{1}{x^2 + b^2}$. L'équation (10.2.1) s'écrit alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g_a(x-t) dt = g_b(x) = \frac{1}{x^2 + b^2},$$

c'est à dire $f * g_a = g_b$. D'où il vient, par transformée de Fourier,

$$\widehat{f} \cdot \widehat{g}_a = \widehat{g}_b.$$

On a donc

$$\widehat{f} = \frac{\widehat{g}_b}{\widehat{g}_a}.$$

En utilisant les propriétés de la transformée de Fourier (multiplication de l'argument) et sachant que

$$\widehat{\frac{1}{\pi(1+x^2)}} = \exp(-2\pi|y|),$$

grâce à la table de ces transformées (cf page 13.1), on calcule

$$\widehat{g}_a(y) = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|y|},$$

d'où

$$\widehat{f}(y) = \frac{\widehat{g}_b(y)}{\widehat{g}_a(y)} = \frac{a}{b} e^{-2\pi(b-a)|y|},$$

et par conséquent, la solution de l'équation intégrale (10.2.1) est la fonction

$$f(x) = \frac{a}{b}(b-a) \frac{1}{\pi(x^2 + (b-a)^2)}.$$

10.3 Transformée de Fourier dans L^2

Il est important de considérer la transformée de Fourier sur l'espace $L^2(\mathbb{R})$: pour des raisons mathématiques (L^2 est un espace de Hilbert, \mathcal{F} est inversible sur L^2 , comme on le verra) et physiques (les fonctions étudiées représentent des phénomènes à énergie finie).

Pour construire la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ on la construit d'abord sur une partie de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et puis à l'aide d'un prolongement par continuité, on l'étend à $L^2(\mathbb{R})$.

Il se trouve qu'il existe un sous-espace vectoriel \mathcal{S} de $L^1(\mathbb{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et invariant (stable) par transformée de Fourier, c'est ce sous-espace vectoriel que nous utiliserons.

10.3.1 Transformée de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

On introduit d'abord l'espace de fonctions $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, espace de Schwartz^c.

c. Laurent Schwartz (1915-2002) est un mathématicien français.

Définition 10.7 On dit qu'une fonction f est à décroissance rapide si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n f(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

L'ensemble des fonctions C^∞ à décroissance rapide dont les dérivées sont à décroissance rapide est un sous-espace vectoriel dans $L^1(\mathbb{R})$ et dans $L^2(\mathbb{R})$. Il est appelé espace de Schwartz et noté $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Pour construire la transformée de Fourier dans L^2 nous avons besoin des propriétés de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Théorème 10.8 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable (invariant) par multiplication par un polynôme, par dérivation et par transformée de Fourier, de plus :

1. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$: toute fonction de $L^2(\mathbb{R})$ est la limite d'une suite de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.
2. La transformée de Fourier \mathcal{F} définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un opérateur (application) linéaire continu.
3. On peut prolonger \mathcal{F} par continuité sur $L^2(\mathbb{R})$ car cet espace est de Banach (complet) sans augmentation de norme.

PREUVE. L'invariance est facile à établir. Les trois autres propositions (1,2,3) sont la conséquence de théorèmes fondamentaux d'analyse fonctionnelle, pas trop compliqués, mais ce n'est pas l'objet principal ici. ■

Comment concrètement construire la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$?

Si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, alors il suffit d'utiliser la définition.

Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ mais $f \notin L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\mathcal{F}(f)(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^{+n} \exp(-2i\pi xy) f(x) dx. \quad (10.3.1)$$

Dans tous les cas la dernière construction (10.3.1) donne la transformée de Fourier de f .

On obtient alors les propriétés additionnelles suivantes.

Théorème 10.9 Soit f et g deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ (à valeurs complexes éventuellement), alors

1. $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(f)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) = f$, p.p. Ce qui peut s'écrire aussi

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}}(f)) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f, \quad \text{p.p. ;}$$

2. Identité de Plancherel-Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(y) \overline{\mathcal{F}(g)(y)} dy = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y) \overline{\widehat{g}(y)} dy ;$$

3. \mathcal{F} est une **isométrie** dans $L^2(\mathbb{R})$: $\|f\|_2 = \|\mathcal{F}(f)\|_2$;

4. Transformée de la convolution : $f * g = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g})$ et $\widehat{f \cdot g} = \widehat{f} * \widehat{g}$.

En fait, la transformée de Fourier est tout simplement un **opérateur unitaire** dans $L^2(\mathbb{R})$ et la convolution est un invariant pour cet opérateur.

PREUVE. On établit les résultats dans \mathcal{S} et on passe à $L^2(\mathbb{R})$ par continuité. ■

Ces propriétés sont utilisées dans de nombreuses applications, en particulier en théorie des probabilités.

Les propriétés élémentaires de la transformée de Fourier dans L^1 et celle du théorème 10.2 sont vérifiées dans L^2 .

10.3.2 Exemple

1. Considérons la fonction sinus cardinal introduite dans ce chapitre en (10.1.2), page 96 à un changement de paramètre près :

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Comme nous l'avons déjà précisé, cette fonction n'est pas dans L^1 mais elle appartient à L^2 car l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

converge^d. Calculons sa transformée de Fourier. Comme cette fonction est paire c'est la transformée cosinus :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \cos(2\pi xy)}{x} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos(2\pi xy)}{x} dx.$$

En utilisant la formule $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$, on obtient

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+2\pi y)x}{x} dx + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-2\pi y)x}{x} dx.$$

Par ailleurs, on sait que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \begin{cases} \pi, & |y| < \frac{1}{2\pi}, \\ 0, & |y| > \frac{1}{2\pi}, \\ \frac{\pi}{2}, & |y| = \frac{1}{2\pi}. \end{cases}$$

On aurait pu obtenir cette formule en utilisant la transformée inverse de Fourier.

En effet, la fonction sinus cardinal est la transformée de Fourier de la fonction porte introduite en (10.1.1) (modulo un changement de variable) par conséquent la transformée du sinus cardinal donnera la fonction porte (modulo un changement de variable et de signe).

10.4 Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ ou $L^2(\mathbb{R}^n)$

La démarche est analogue. On définit d'abord la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ par une formule pratiquement identique

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi x \cdot y} f(x) dx,$$

où $x = (x_1, \dots, x_n); y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, le produit $x \cdot y$ est un produit scalaire :

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

et $dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ est construit sur la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n . L'intégrale de Fourier converge pour toute fonction f de $L^1(\mathbb{R}^n)$.

d. Il n'y a pas de singularité en 0 et à l'infini elle est majoré par $\frac{1}{x^2}$.

La fonction \widehat{f} est continue, de plus $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Toutes les propriétés de la transformée de Fourier peuvent être reformulées ou adaptées.

Puis on introduit l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de fonctions à décroissance rapide, telles que

$$x^\alpha D^\beta f(x) \in C_0(\mathbb{R}^n),$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ sont des multi-index et

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1} \dots \partial^{\beta_n}}{\partial^{\beta_1} x_1 \dots \partial^{\beta_n} x_n}.$$

La transformée de Fourier est introduite dans cet espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par la même formule. C'est une isométrie dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

À partir de là, par densité et prolongement continu, on définit la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. C'est aussi une isométrie dans cet espace de Hilbert. Toutes les autres propriétés sont conservées. Il est, évidemment, nécessaire de les adapter.

Chapitre 11

Transformée de Laplace

C'est une transformée intégrale d'usage très courant dans les sciences de l'ingénieur (automatique, électronique, mécanique). Comme la transformée de Fourier elle permet d'analyser ou de résoudre des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. Contrairement à la transformée de Fourier, elle tient compte (mieux) des conditions initiales.

11.1 Définition et propriétés

Les hypothèses sur les fonctions soumises à la transformée de Laplace sont les suivantes :

1. f est définie sur \mathbb{R}^+ . Si elle est définie sur \mathbb{R} on considère sa restriction sur \mathbb{R}^+ ;
2. f est de classe $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$ c'est à dire intégrable sur tout compact de \mathbb{R}^+ , pas nécessairement sur tout \mathbb{R}^+ .
3. f est à croissance au plus exponentielle : il existe $\omega > 0$ tel que $f(t)e^{-\omega t} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. La constante

$$\sigma(f) = \omega_0 = \inf \{ \omega \mid f(t)e^{-\omega t} \in L^1(\mathbb{R}^+) \} < \infty$$

est appelé abscisse de sommation ou abscisse de convergence.

L'ensemble qui vérifie toutes ces propriétés sera noté L^+ .

Par exemple, ces hypothèses sont vérifiées pour les fonctions élémentaires : fraction rationnelle, \sin , \cos , e^{at} , etc. Pour la fonction e^{t^2} on a $\sigma(f) = +\infty$.

Définition 11.1 Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ une fonction telle que $\sigma(f) < \infty$, c'est à dire $f \in L^+$. On appelle transformée de Laplace la fonction de variable complexe

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt, \quad p \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} p > \sigma(f).$$

C'est une fonction à variable complexe holomorphe dans le demi-plan $\{p \mid \operatorname{Re} p > \sigma(f)\}$. La fonction f est l'**original** et la fonction $\mathcal{L}(f)$ l'**image** de la transformée de Laplace.

On calcule assez facilement les images de certaines fonctions élémentaires :

1. $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{p^{n+1}}$;
2. $\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{p-\alpha}$;
3. $\mathcal{L}(\sin \beta t) = \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$;
4. $\mathcal{L}(\cos \beta t) = \frac{p}{p^2 + \beta^2}$.

L'holomorphie de la transformée de Laplace n'est pas triviale. Précisons les choses.

Théorème 11.2 *La transformée de Laplace d'une fonction f est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{p \mid \operatorname{Re} p > \sigma(f)\}$ et ses dérivées sont données par la formule*

$$\frac{d^n \mathcal{L}(f)}{dp^n}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} (-t)^n f(t) dt = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)](p).$$

PREUVE. Se démontre à l'aide du théorème sur la convergence dominée et celui de la dérivation d'une intégrale paramétrée appliqués sur le domaine $\{p \mid \operatorname{Re} p \geq c_0 > \sigma(f)\}$. Puis on dérive sous le signe de l'intégrale.

On utilise le fait que $\sigma(f(t)) = \sigma(t^k f(t))$, $k \in \mathbb{N}$, ce qui peut se vérifier facilement. ■

Autres propriétés de la transformée de Laplace, certaines se démontrant par simple calcul, d'autres sont moins évidentes, toutes sont importantes.

Théorème 11.3 *Soit f et g des fonctions de $L_{loc}^1(\mathbb{R}^+)$ à abscisse de convergence finie, $f, g \in L^+$. Alors*

1. **Linéarité** : $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$;
2. **Décalage** : $\mathcal{L}[e^{at} f(t)](p) = \mathcal{L}(f)(p - a)$. Exemple : $\mathcal{L}[e^{at} t^n](p) = \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
3. **Retard** : $\mathcal{L}[f(t - t_0)](p) = e^{-pt_0} \mathcal{L}(f)(p)$;
4. **Changement d'échelle** : pour $a > 0$ on a $\mathcal{L}(f(at))(p) = \frac{1}{a} \mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{a}\right)$;
5. **Transformée des dérivées** : pour $f, f' \in L^+$ on a

$$\mathcal{L}(f')(p) = p \mathcal{L}(f)(p) - f(0^+),$$

et de même, si toutes les dérivées $f^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ sont dans L^+ on aura

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n \mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+);$$

6. **Transformée de l'intégrale** :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(s) ds\right) = \frac{\mathcal{L}(f)(p)}{p};$$

On retiendra : la dérivation consiste à multiplier par l'argument p , l'intégration à diviser par l'argument p , tout en faisant **attention aux conditions initiales**.

Une attention particulière doit être accordée à la convolution. Soit $f, g \in L^+$ telles que $f(x) = 0, x < 0$ et $g(x) = 0, x < 0$. Alors la convolution est donnée par l'expression

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(s) g(t - s) ds = \int_0^t f(s) g(t - s) ds.$$

On peut montrer dans ce cas que $f * g \in L^+$ et que $\sigma(f * g) = \max(\sigma_f, \sigma_g)$. On a le théorème suivant.

Théorème 11.4 (Transformée de Laplace d'une convolution) *Si $f, g \in L^+$ on a $f * g \in L^+$ et*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

définie sur $\{p \mid \operatorname{Re} p > \max(\sigma_f, \sigma_g)\}$.

Et enfin on peut énoncer ce qui fait la particularité de la transformée de Laplace, le théorème sur les valeurs limites.

Théorème 11.5 (Valeurs limites) Soit $f \in L^+$, alors

1. $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(p) = 0$;
2. $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} p \mathcal{L}(f)(p) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$, si cette limite existe ;
3. pour $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ on a

$$\lim_{p \rightarrow 0} \mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t) dt;$$

4. $\lim_{p \rightarrow 0} p \mathcal{L}(f)(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty)$, si cette limite existe.

PREUVE. Toutes les démonstrations sont basées sur les propriétés des intégrales paramétrées et le théorème sur la convergence dominée. ■

11.2 Inversion de la transformée de Laplace

Enfin, on peut toujours poser le problème de l'inversion de la transformée de Laplace. C'est une question assez compliquée. Pour obtenir une formule d'inversion, nous utiliserons la transformée de Fourier. Ce n'est pas nécessaire, *a priori*, mais ça permet de comprendre d'où vient la formule.

Pour simplifier le raisonnement, nous supposons que $f \in L^+$ et $f(t) = 0$, $t < 0$. Alors la fonction

$$\varphi(t) = e^{-ct} f(t) \in L^1(\mathbb{R}), \quad c > \sigma(f).$$

Supposons que sa transformée de Fourier soit aussi dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors, d'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier :

$$\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\varphi)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = \varphi,$$

on obtient

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x s} e^{-cs} f(s) ds \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i t x} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\pi i x s} e^{-cs} f(s) ds \right) dx,$$

car $f(s) = 0$, $s < 0$. Faisons maintenant le changement de variable $p = 2\pi i x + c$ dans l'intégrale intérieure. Ce changement de variable donne d'abord $dp = 2\pi i dx$, implique des changements de bornes et de chemin d'intégration. Quand x se trouvait sur la droite \mathbb{R} , p va parcourir une droite verticale d'abscisse c . On obtient

$$e^{-ct} f(t) = \varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{(p-c)t} \left(\int_0^{+\infty} e^{-ps} f(s) ds \right) dp.$$

On reconnaît à l'intérieur de la première intégrale la transformée de Laplace et, en simplifiant par e^{-ct} , il vient

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (11.2.1)$$

où $F(p) = \mathcal{L}(f)(p)$. On a donc obtenu la formule d'inversion de la transformée de Laplace. C'est la formule de Mellin-Fourier^a.

On peut formaliser ce qui précède comme suit.

a. Hjalmar Mellin (1854-1933), mathématicien finlandais.

Théorème 11.6 Si $F(p) = F(x + iy)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $x > c$ et telle que $F(x + iy)$ soit intégrable pour tout $x > c$, alors F est la transformée de Laplace d'une fonction f qui peut être déterminée par la formule de Mellin-Fourier (11.2.1)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp.$$

L'intégrale se calcule à l'aide de la méthode des résidus (cf. chapitre 5) et du Lemme de Jordan. Cependant, dans la plupart des applications, il suffit d'utiliser une table (inversible) de transformées de Laplace (cf. paragraphe 13.2, page 112).

11.3 Applications

1. Soit à résoudre l'équation différentielle suivante

$$f'' - 2f' + f = 1, \quad t > 0, \quad f(0) = f'(0) = 0,$$

C'est un problème aux conditions initiales (on dit aussi problème de Cauchy). Appliquons la transformée de Laplace. Si on note $F(p) = \mathcal{L}(f)$, on obtient

$$p^2 F(p) - 2pF(p) + F(p) = \frac{1}{p},$$

ce qui donne

$$F(p) = \mathcal{L}(f) = \frac{1}{(p-1)^2 p}.$$

On peut vérifier que

$$\frac{1}{(p-1)^2} = \mathcal{L}(te^t) = \mathcal{L}(g(t)), \quad \frac{1}{p} = \mathcal{L}(1) = \mathcal{L}(h(t)).$$

D'où, en utilisant la convolution,

$$f(t) = \int_0^t h(s)g(t-s) ds = \int_0^t (t-s)e^{-(t-s)} ds = \int_0^t se^{-s} ds = -te^{-t} - e^{-t} + 1.$$

Signalons que la convolution n'est pas toujours si facile à calculer.

2. Ici une application, très courante en théorie du contrôle (automatique). Beaucoup de phénomènes physiques peuvent être décrits par un système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt}(t) &= a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_{11}u_1(t) + \cdots + b_{1m}u_m(t), \\ \frac{dx_2}{dt}(t) &= a_{21}x_1(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_{21}u_1(t) + \cdots + b_{2m}u_m(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t) &= a_{n1}x_1(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_{n1}u_1(t) + \cdots + b_{nm}u_m(t) \end{aligned} \tag{11.3.1}$$

où $x_i(t), i = 1, \dots, n$ représentent l'état d'un système physique, $u_i(t), i = 1, \dots, m$ des actions extérieures sur le système physique, appelées contrôles ou commandes. Ce système d'équations différentielles peut être écrit sous une forme vectorielle et matricielle :

$$\frac{dx}{dt}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$, et les matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ étant de dimensions adéquates. On applique la transformée de Laplace au système (11.3.1)

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) = \mathcal{L}(Ax(t)) + \mathcal{L}(Bu(t)),$$

ce qui donne par linéarité et en utilisant les propriétés de la transformée de Laplace

$$p\mathcal{L}(x) - x(0) = A\mathcal{L}(x) + B\mathcal{L}(u).$$

Il en découle

$$(pI - A)\mathcal{L}(x) = x(0) + B\mathcal{L}(u).$$

Pour $\operatorname{Re} p > a_0$ qu'on peut expliciter, la matrice $(pI - A)$ est inversible et on a alors

$$\mathcal{L}(x)(p) = (pI - A)^{-1}x(0) + (pI - A)^{-1}B\mathcal{L}(u),$$

c'est la solution du système, ou plutôt sa transformée de Laplace. La solution en t peut être obtenue en appliquant la transformée inverse de Laplace. On peut montrer que

$$(pI - A)^{-1} = \mathcal{L}(e^{tA})$$

où e^{tA} est la matrice exponentielle définie par

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n.$$

La solution du système (11.3.1) en t sera alors, en utilisant la convolution,

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds,$$

qui aurait pu aussi être calculée directement par variation de la constante arbitraire. Mais le passage par la transformée de Laplace est courant dans les domaines qui utilisent les équations différentielles linéaires.

Si on introduit en plus la notion de sortie ou d'observation :

$$y(t) = Cx(t),$$

alors la relation entre le contrôle u et la sortie y est donnée, après transformée de Laplace par

$$\mathcal{L}(y) = C(pI - A)^{-1}B\mathcal{L}(u).$$

La matrice

$$T(p) = C(pI - A)^{-1}B$$

est appelée *matrice de transfert* du système. Dans le cas scalaire (une entrée, une sortie) c'est une fonction de transfert scalaire. C'est une fonction rationnelle en p bien connue en électronique, automatique et en mécanique.

Beaucoup de propriétés du système dynamique peuvent être extraites de la fonction de transfert. La régulation de ces systèmes peut être aussi réalisée à l'aide de ce transfert.

Chapitre 12

Transformées intégrales des distributions

Pour compléter ces chapitres d'analyse, ils nous semble nécessaire d'introduire les **distributions** de montrer comment les transformées intégrales agissent sur ces **fonctions généralisées**.

Rappelons que c'est pour modéliser des phénomènes physiques impulsions que Dirac et Heaviside ont introduit, chacun de son côté la fonction dite fonction **delta** de Dirac

$$\delta_{x_0}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}, \end{cases} \quad (12.0.1)$$

noté simplement $\delta(x)$ pour $x_0 = 0$. Cette pseudo-fonction est telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_{x_0}(x) \cdot \phi(x) dx = \phi(x_0)$$

pour toute fonction continue ϕ . Comme on le voit δ n'est pas une fonction habituelle. Elle peut être considérée comme la limite, dans un sens à préciser, de fonctions habituelles. Par exemple la suite de fonctions gaussiennes

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n^2 x^2}{2}}$$

est telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \cdot \phi(x) dx = \phi(0)$$

pour toute fonction ϕ bornée et continue sur \mathbb{R} . On aurait donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \cdot \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) \cdot \phi(x) dx = \phi(0).$$

Il s'agit donc de donner une formalisme mathématique correct permettant de manipuler ces fonctions généralisées qui, de part leur place dans les limites précédentes et dans signification physique (répartition de matière, charge électrique, etc) sont appelées **distributions**.

Pour comprendre la technique utilisée pour certaines définitions et propriétés des distributions, considérons le cas de fonctions habituelles vues comme des distributions.

Si f est une fonction de classe $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ on peut estimer qu'elle est connue si on connaît sa "projection" sur toute fonction continue à support compact ϕ :

$$T_f(\phi) = \langle T_f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(x) dx.$$

Si on veut qu'elle soit dérivable, alors

$$T(\phi) = \langle T_{f'}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f'(x) \phi(x) dx = f(x) \phi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi'(x) dx = -T_f(\phi').$$

Cela nous donne à la fois la formule qui permet de définir la dérivée et l'exigence de prendre une famille $\{\phi\}$ suffisamment dérivable. C'est Schwartz qui a fait le pas décisif, après les initiatives de bien d'autres, dont Sobolev^a, pour construire les bons espaces permettant une théorie cohérente avec les exigences et les avancées du calcul symbolique de Heaviside et Dirac.

12.1 Fonctions-tests et distributions

On désigne par $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonction ϕ infiniment dérivable et à support^b compact dites fonctions-tests. Cet ensemble avec l'addition naturelle de fonction et la multiplication par des scalaires est un espace vectoriel de fonctions. Il est muni d'une topologie induite par la notion de convergence suivante. Soit $\{\phi_n, b \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On dit que ϕ converge vers $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si les supports de toutes les fonctions sont dans un même compact K et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} \left| \phi_n^{(k)}(x) - \phi^{(k)}(x) \right| = 0.$$

Ainsi, toutes les dérivées doivent converger au sens de la norme sup (convergence uniforme de fait).

La notion de convergence permet de définir les ensembles fermés (qui contiennent tous leurs points d'adhérences), les ensembles ouverts (compléments fermés) et donc une topologie. Cette topologie ne peut pas être engendrée par une métrique et donc pas par une norme mais par une famille de semi-normes dont nous n'aurons pas besoin ici.

L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ muni de cette topologie est complet : toute suite de cauchy converge^c.

a. Mathématicien et physicien russe (1908–1989) de l'école soviétique, a introduit la notion de fonction généralisée.

b. Voir la notion de support d'une fonction en page 90.

c. C'est d'ailleurs ce qui l'empêche d'avoir une métrique correspondant à sa topologie.

Chapitre 13

Tables de transformées intégrales

13.1 Transformées de Fourier

Fonction $f(x)$	$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i y x} dx$
$\mathbf{I}_{[-a,+a]}(x), a > 0$	$2a \operatorname{sinc}(2\pi a y) = 2a \frac{\sin(2\pi a y)}{2\pi a y}$
$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-2\pi^2 y^2 \sigma^2}$
$\left(1 - \frac{ t }{a}\right) \mathbf{I}_{[-a,+a]}(x), a > 0$	$a(\operatorname{sinc}(\pi a y))^2$
$e^{-a x }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi y)^2}$
$e^{-\frac{x}{a}} \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(x), a > 0$	$\frac{a}{1 + 2i\pi y a}$
$\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$e^{-2\pi y }$
$\operatorname{sinc} = \frac{\sin x}{x}$	$\pi \mathbf{I}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}$

13.2 Transformées de Laplace

Dans le tableau $H(t)$ est la fonction de Heaviside $H(t) = \mathbf{I}_{[0,+\infty[}$.

Fonction $f(t)$, $t \geq 0$	$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$
$H(t)$	$\frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0$
t	$\frac{1}{p^2}, \quad \operatorname{Re} p > 0$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad \operatorname{Re} p > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
$t^n e^{at}, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$
$e^{at} f(t)$	$\mathcal{L}(f)(p-a)$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > -\operatorname{Re} a$
$\frac{ae^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi}t^{3/2}}, \quad a > 0$	$e^{-a\sqrt{p}}, \quad \operatorname{Re} p > 0$
$e^{At}, \quad A \in \mathcal{M}_n$	$(pI - A)^{-1}, \quad \operatorname{Re} p > \ A\ $

Bibliographie

- [1] M. L. Boas, Mathematical methods in physical sciences. Wiley, N.-Y., 1983.
- [2] Y. Caumel, Cours d'analyse fonctionnelle et complexe. Ed. Cépaduès, 2003.
- [3] G. M. Fikhtengolts, Calcul différentiel et intégral, vol. 3, Nauka, Moskva, 1969.
- [4] A. Henrot, Fonctions holomorphes. Mines de Nancy, cours photocopié, 2004.
- [5] M. A. Lavrentiev, B. V. Chabat, Méthodes de la théorie des fonctions à variable complexe. Nauka, Moskva, 1970.
- [6] J. Lelong-Ferrang, J. M. Arnaudies, Cours de mathématiques. T 4, Dunod, Paris, 1980.
- [7] W. Rudin, Real and complex analysis. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

Index

- σ -algèbre, 71
- Abscisse
 - de convergence, 103
 - de sommation, 103
- Argument d'un nombre complexe, 33
- Boule
 - fermée, 3
 - ouverte, 3
- Champ dérivant d'un potentiel, 20
- Conditions de Cauchy-Riemann, 35, 38
- Coordonnées sphériques, 9
- Courbe rectifiable, 11
- Détermination principale, 42
- Difféomorphisme, 9
- Différentielle exacte, 21
- Divergence
 - Théorème de la, 26
- Domaine, 4
- Ensemble
 - borné, 3
 - connexe, 3
 - dénombrable, 72
 - de Cantor, 72
 - fermé, 3
 - mesuré, 72
 - négligeable, 73
 - ouvert, 3
 - simplement connexe, 4
- Espace
 - de Banach, 87
 - de Hilbert, 88
 - de Schwartz, 98
- Fonction
 - étagée, 74
 - à décroissance rapide, 99
 - de Heaviside, 74
 - de transfert, 107
 - entière, 65
 - holomorphe, 34
 - indicatrice, 74
 - méromorphe, 52
 - multivoque, 42
 - porte, 74, 96
- Fonction δ de Dirac, 109
- Forme différentielle, 16
- Formule
 - d'Ostrogradsky, 26
 - de Cauchy-Hadamard, 36
 - de Green, 17
 - de Green-Riemann, 17
 - de la divergence, 19
 - de Mellin-Fourier, 105
 - de Stokes, 26
- Fréquence, 93
- Fubini
 - méthode de, 8
- Intégrale
 - de Lebesgue, 75
- Intégrale curviligne
 - de 1^{re} espèce, 12
 - de 2^e espèce, 14
 - de fonction scalaire, 12
 - de fonction vectorielle, 14
- Intégrale de surface
 - de fonction scalaire, 23
 - de fonction vectorielle, 24
- Invariance par translation, 72
- isométrie, 99
- Jacobien, 9
- Jacobienne, 5
- Lebesgue intégrable, 75
- Logarithme complexe, 42
- Méthode de Fubini, 8
- Matrice
 - jacobienne, 5

- Mesure, 72
 - d'un singleton, 72
 - positive, 72
- Mesure de Lebesgue, 72
- Module d'un nombre complexe, 33
- Multiplicité d'un zéro
 - d'une fonction holomorphe, 67
- Norme euclidienne, 3, 5
- Opérateur unitaire, 99
- Pôle, 52
- Plan tangent, 6
- Point singulier, 52
- Potentiel, 20
- Presque-partout (p.p.), 73
- Principe du maximum, 65
- Pulsation, 93
- Résidu
 - à l'infini, 54
 - d'un point singulier, 53
- Série
 - de Laurent, 50
 - de Taylor, 52
 - entière, 36
- Singularité
 - éliminable, 52
 - essentielle, 53
- Sinus cardinal, 96
- Suite de Cauchy, 87
- Support d'une fonction, 90
- Surface quarrable, 23
- Théorème
 - d'Ostrogradsky, 26
 - de Beppo Levi, 79
 - de Cauchy-Goursat, 45
 - de convergence dominée, 81
 - de convergence monotone, 79
 - de Fubini, 85
 - de Green, 17
 - de Green-Riemann, 17
 - de la divergence, 26
 - de la moyenne, 49
 - de Riemann-Lebesgue, 90
 - de Rouché, 68
 - de Stokes, 26
 - des résidus, 53
- Transformée
 - de Fourier dans L^1 , 93
- Transformée de Fourier
 - d'une convolution, 97
- Transformée de Fourier inverse, 96
- Tribu, 71
 - borélienne, 71
- Volume, 9